

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série ES

Enseignement de Spécialité

*Durée de l'épreuve : 3 heures*

*Coefficient : 7*

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Du papier millimétré est mis à disposition du candidat.

*Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**EXERCICE 1 (5 points)**  
**Commun à tous les candidats**

Le tableau ci-dessous donne le prix du kilogramme de pain dans un quartier d'une grande ville depuis 2001 (les prix sont relevés au premier janvier).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang $x_i$	1	2	3	4	5	6
Prix $y_i$ du kilogramme de pain en euro	1,90	1,94	2,01	2,07	2,13	2,16

1. Calculer le pourcentage d'évolution du prix du kilogramme de pain dans ce quartier entre les années 2000 et 2005. On donnera une valeur arrondie au centième.
2. Représenter le nuage de points associé à la série  $(x_i; y_i)$  dans un repère du plan.
3. (a) Pourquoi un ajustement affine du nuage de points est-il justifié?  
(b) Déterminer une équation de la droite  $(D)$  d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$  près.  
(c) Représenter la droite  $(D)$  dans le repère précédent.  
(d) En admettant que le modèle précédent est valable pour les années suivantes, calculer le prix du kilogramme de pain dans ce quartier en 2010 (valeur arrondie au centième).
4. On considère maintenant un autre modèle pour étudier l'évolution du prix du kilogramme de pain dans ce quartier. Les relevés de prix entre 2005 et 2008 ont permis de constater que le prix du kilogramme de pain a augmenté de 1,5% par an.  
En admettant que le prix du kilogramme de pain continue d'augmenter chaque année de 1,5%, calculer le prix du kilogramme de pain dans ce quartier en 2010 (valeur arrondie au centième).
5. Pour chacun des modèles précédents, déterminer à partir de quelle année le prix du kilogramme de pain dans ce quartier dépassera 2,60 euros.

**EXERCICE 2 (5 points)**  
**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un enfant joue aux fléchettes. Un adulte observe son jeu et remarque que si l'enfant atteint la cible lors d'un lancer, alors il atteint encore la cible au lancer suivant avec une probabilité égale à  $\frac{3}{4}$ .

Si l'enfant n'atteint pas la cible lors d'un lancer, alors il atteint la cible au lancer suivant avec une probabilité égale à  $\frac{1}{8}$ .

Lors du premier lancer, l'enfant atteint la cible avec une probabilité égale à  $\frac{1}{10}$ .

1. On note  $C$  l'état : « l'enfant atteint la cible » et on note  $R$  l'état : « l'enfant n'atteint pas la cible ».

(a) Représenter la situation par un graphe probabiliste.

(b) Écrire la matrice de transition  $M$  de ce graphe en considérant les états dans l'ordre alphabétique.

2. On désigne par  $n$  un nombre entier naturel non nul.

Soient  $C_n$  l'événement : « l'enfant atteint la cible au  $n$ -ième lancer », et  $R_n$  l'événement : « l'enfant n'atteint pas la cible au  $n$ -ième lancer ». L'état probabiliste lors du  $n$ -ième lancer est donné par la matrice ligne  $E_n = (c_n \ r_n)$  où  $c_n$  désigne la probabilité de l'événement  $C_n$  et  $r_n$  la probabilité de l'événement  $R_n$ .

(a) Écrire la matrice ligne  $E_1$  de l'état probabiliste initial.

(b) Déterminer la matrice ligne  $E_3$  et donner une interprétation du résultat obtenu.

3. Soit  $E = (c \ r)$  la matrice ligne de l'état probabiliste stable.

(a) Déterminer  $c$  et  $r$ .

(b) L'adulte affirme qu'après un très grand nombre de lancers, l'enfant a deux fois plus de chance de manquer la cible que de l'atteindre. Cette affirmation est-elle justifiée ?



**EXERCICE 3 (4 points)**  
**Commun à tous les candidats**

Pour chacune des questions de ce QCM, une seule des quatre propositions (a), (b), (c) ou (d) est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

*Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'enlève aucun point.*

1. Une ville en pleine expansion a vu sa population augmenter de 20% pendant quatre années consécutives, puis de 7% durant chacune des cinq années suivantes, et enfin de 6% la dixième et dernière année. Le taux d'augmentation annuel moyen (arrondi au dixième) durant la décennie qui vient de s'écouler s'élève à :
  - (a) 33,0%
  - (b) 12,1%
  - (c) 11,9%
  - (d) 11,0%
  
2. La population de la ville voisine a diminué de 5% en 2008. Quel pourcentage d'augmentation (arrondi au dixième) devrait-elle connaître en 2009 pour que le nombre d'habitants le 1er janvier 2010 soit égal au nombre d'habitants à la date du 1er janvier 2008 ?
  - (a) 10,0%
  - (b) 5,3%
  - (c) 5,0%
  - (d) 4,7%
  
3. Le double du logarithme d'un nombre est égal au logarithme de la moitié de ce nombre. Quel est ce nombre ?
  - (a) -1
  - (b) 0
  - (c) 0,5
  - (d) 2
  
4. Une fonction  $f$ , définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 5]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[5; +\infty[$ . Sa courbe représentative  $C$  dans un repère du plan admet une tangente  $\mathcal{T}$  au point d'abscisse 6. Laquelle des équations suivantes est celle de la tangente  $\mathcal{T}$  ?
  - (a)  $y = -3x + 3$
  - (b)  $y = x$
  - (c)  $y = 6x - 36$
  - (d)  $x = 6$

**EXERCICE 4 (6 points)**  
Commun à tous les candidats

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = (7-x)e^{x-4} \quad \text{et} \quad g(x) = 2 \ln \left( \frac{x+5}{x+1} \right).$$

**Partie A : Étude des fonctions  $f$  et  $g$ .**

1. (a) Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
- (b) Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = (6-x)e^{x-4}.$$

- (c) Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et établir son tableau de variation.
2. (a) Soit  $h$  la fonction définie sur  $] -\infty; -1[ \cup ] -1; +\infty[$  par :

$$h(x) = \frac{x+5}{x+1}.$$

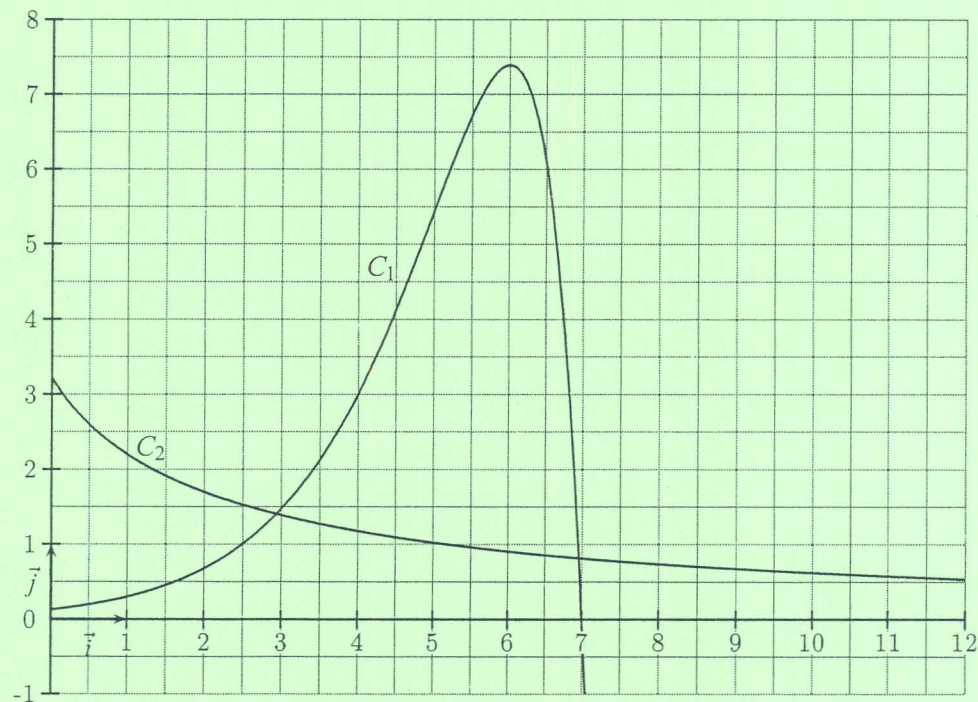
Le tableau de variation de la fonction  $h$  est donné ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$h'(x)$	-		-
$h(x)$	1	↘	$+\infty$ ↘ 1
		$-\infty$	

Déterminer, en le justifiant, le sens de variation de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

- (b) Déterminer la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ . Quelle en est la conséquence graphique ?

3. Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sont données dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ci-dessous.



- (a) Laquelle de ces deux fonctions est représentée par la courbe  $C_1$  ?
- (b) Déterminer graphiquement une valeur approchée arrondie à l'unité des solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- (c) Dans cette question, toute tentative d'explication de la démarche ou de la méthode utilisée sera valorisée.

Le professeur a demandé à Perrine et Elliot de calculer  $\int_0^3 f(x)dx$ .

Voici des extraits de leurs productions :

*Production de Perrine :*

Une primitive de  $f$  est  $F$  telle que  $F(x) = (8-x)e^{x-4}$ , donc  $\int_0^3 f(x)dx = 5e^{-1} - 8e^{-4} \simeq 1,69$ .

*Production d'Elliot :*

Une primitive de  $f$  est  $F$  telle que  $F(x) = (7x - \frac{1}{2}x^2)e^{x-4}$ , donc  $\int_0^3 f(x)dx = 16,5e^{-1} \simeq 6,07$ .

Lors de la correction, le professeur indique que l'un des deux s'est trompé. Est-ce Perrine ou Elliot ? Justifier le choix.

### Partie B : Application économique.

Sur l'intervalle  $[0; 5]$ , la fonction  $f$  modélise la fonction d'offre des producteurs d'un certain produit et la fonction  $g$  modélise la fonction de demande des consommateurs pour ce même produit. La quantité  $x$  est exprimée en millier de tonnes et le prix  $f(x)$  ou  $g(x)$  est en euro par kg.

On rappelle que le prix d'équilibre est le prix qui se forme sur le marché lorsque l'offre est égale à la demande. La quantité d'équilibre est la quantité associée au prix d'équilibre.

Par lecture graphique, donner une valeur approchée de la quantité d'équilibre  $x_0$ , ainsi qu'une valeur approchée du prix d'équilibre  $y_0$ .