BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7**

Ce sujet comporte 6 pages dont 1 feuille DOCUMENT RÉPONSE

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille DOCUMENT RÉPONSE est à rendre avec la copie.

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez en immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 *(3 points)*

Commun à tous les candidats

Les deux questions sont indépendantes.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Le gouvernement d'un pays envisage de baisser un impôt de 30 % en cinq ans.

1) On suppose que le pourcentage de baisse est le même chaque année.
   Vérifier que ce pourcentage de baisse annuel est alors égal à environ 6,89 %.

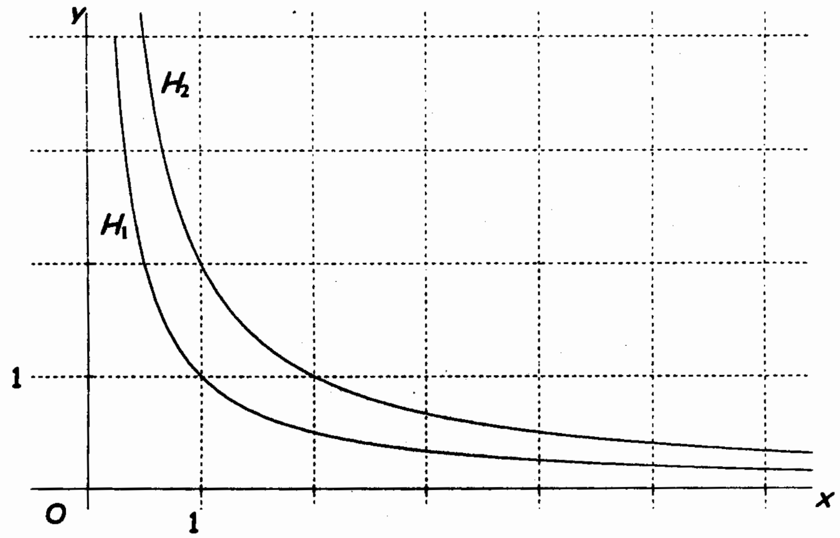
2) La première année cet impôt baisse de 5 %, la deuxième année la baisse est de 1 % et la troisième année de 3 %.

   a) Quelle est la baisse, en pourcentage, de cet impôt au terme de ces trois premières années ?

   b) Pour atteindre son objectif, quel pourcentage annuel de baisse doit décider ce gouvernement, en supposant que ce pourcentage est le même sur les deux dernières années ?

EXERCICE 2 *(5 points)*

Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique



Les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ représentées dans le repère orthonormal ci-dessus ont respectivement pour équation

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{x}.$$

On note $\mathcal{D}_2$ le domaine délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

On note $\mathcal{D}'_2$ le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{H}_1$ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

1) Colorier les domaines $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ d'une couleur différente et montrer qu'ils ont la même aire.

Soit n un entier naturel strictement positif. On note u_n l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

2) Exprimer u_n en fonction de n .

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
On pourra comparer les nombres $n(n+2)$ *et* $(n+1)^2$.

4) Etudier la convergence de la suite (u_n).

5) Déterminer la plus grande valeur de n telle que l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ reste supérieure à $\frac{1}{10}$ d'unité d'aire. Soit N cette valeur.

6) Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = N$.

EXERCICE 3 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des réponses proposées est exacte.
L'exercice consiste à cocher cette réponse exacte sans justification.

Barème : *Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

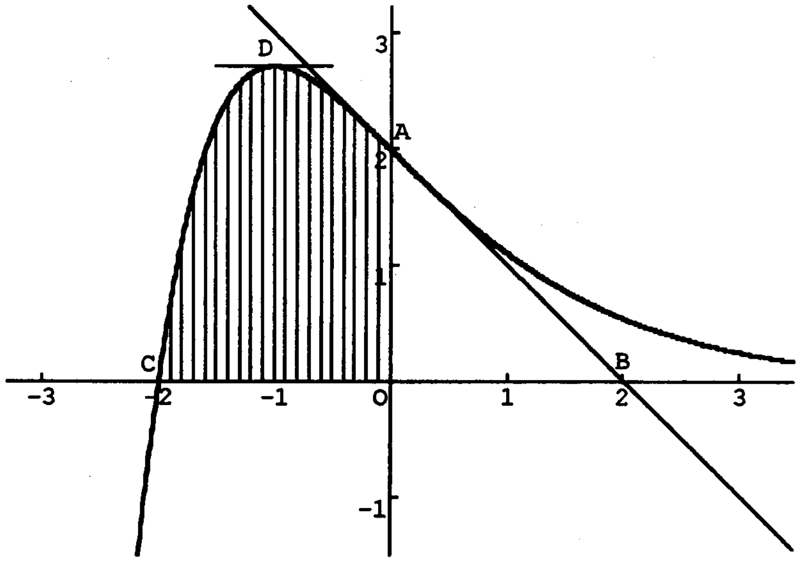
COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

QUESTIONS	REPONSES
1) Soit une série statistique à deux variables (x ;y). Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est : y = 1,35 x + 22,8. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ (6,5 ; 30,575) ☐ (32, 575 ; 6,5) ☐ (6,5 ; 31,575)
2) (u_n)est une suite arithmétique de raison – 5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5$ ☐ $u_{10} = u_2 + 40$ ☐ $u_3 = u_7 + 20$
3) L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie	☐ Pour tout x de $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ ☐ Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$ ☐ Pour tout x de $]1\ ;\ +\infty[$
4) Pour tout réel x, le nombre $\frac{e^x-1}{e^x+2}$ est égal à :	☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+2}$ ☐ $\frac{1-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$
5) On pose $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ et $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$ alors le nombre I – J est égal à	☐ $\ln\frac{2}{3}$ ☐ $\ln\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$
6) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1 - \frac{2}{100}\right)^x \leq 0{,}5$ est	☐ $S =]-\infty\ ;\ \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}[$ ☐ $S = [\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)}\ ;\ +\infty[$ ☐ $S = [\ln\frac{0{,}5}{0{,}98}\ ;\ +\infty[$

EXERCICE 4 *(6 points)*

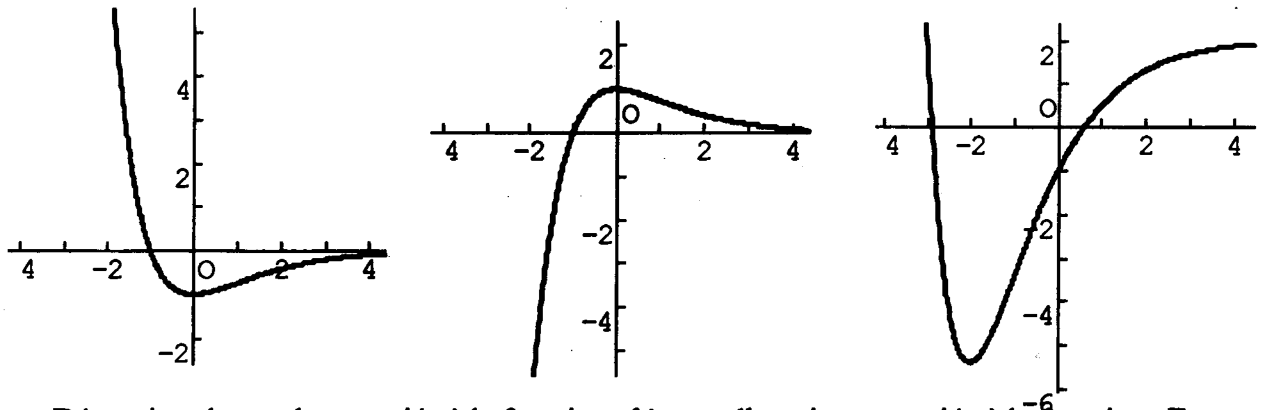
Commun à tous les candidats

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.La courbe Γ passe par les points $A(0\,;2)$ et $C(-2\,;0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée $f\,'$ de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Courbe 1 Courbe 2 Courbe 3



Déterminer la courbe associée à la fonction $f\,'$ et celle qui est associée à la fonction F.

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix.

2) a) Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f\,'(0)$.

b) On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x + K)\,e^{\alpha x}$ où K et α sont des constantes réelles.

Calculer $f\,'(x)$, puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et α.

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)\,e^{-x}$.

3) a) Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x) = (-x-3)\,e^{-x}$ est une primitive de f.

b) En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée.

On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

ANNEXE

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC LA COPIE

(Exercice 3)

QUESTIONS	REPONSES
1) Soit une série statistique à deux variables (x ;y). Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est : y = 1,35 x + 22,8. Les coordonnées du point moyen sont :	☐ (6,5 ; 30,575) ☐ (32, 575 ; 6,5) ☐ (6,5 ; 31,575)
2) (u_n)est une suite arithmétique de raison – 5. Laquelle de ces affirmations est exacte ?	☐ Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = 5$ ☐ $u_{10} = u_2 + 40$ ☐ $u_3 = u_7 + 20$
3) L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie	☐ Pour tout x de $]-\infty\ ;\ -1[\ \cup\ ]1\ ;\ +\infty[$ ☐ Pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$ ☐ Pour tout x de $]1\ ;\ +\infty[$
4) Pour tout réel x, le nombre $\frac{e^x-1}{e^x+2}$ est égal à :	☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+2}$ ☐ $\frac{1-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$
5) On pose $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ et $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$ alors le nombre I – J est égal à	☐ $\ln\frac{2}{3}$ ☐ $\ln\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$
6) L'ensemble des solutions de l'inéquation $\left(1 - \frac{2}{100}\right)^x \leq 0,5$ est	☐ $S = \left]-\infty\ ;\ \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\right[$ ☐ $S = \left[\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,98)}\ ;\ +\infty\right[$ ☐ $S = \left[\ln\frac{0,5}{0,98}\ ;\ +\infty\right[$