

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

SPÉCIALITÉ

Ce sujet comporte 6 pages
dont 1 feuille : **Annexe à rendre avec la copie.**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

La feuille Annexe (document réponse) est à rendre avec la copie

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez en immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 - Commun à tous les candidats (sur 3 points)

Questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. On demande d'indiquer la réponse exacte en cochant sans justification la grille réponse jointe en annexe à rendre avec la copie. Une bonne réponse rapporte 0,5 point ; une mauvaise réponse enlève 0,25 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	-3	-5	4	-4,5

On désigne par C la courbe représentative de f .

1. Sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$:

- admet une seule solution
- admet deux solutions
- admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $] -5 ; +\infty[$, la courbe C :

- admet une seule asymptote la droite d'équation $x = -5$
- admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $x = -4,5$ et $y = -5$
- admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $y = -4,5$ et $x = -5$.

3. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 2 est :

- $y = 4$
- $y = 4(x - 2)$
- $x = 4$.

4. On sait que l'équation de la tangente à C au point de coordonnées (1 ; 2) est $y = 3x - 1$. On a :

- $f(2) = 1$
- $f'(1) = -1$
- $f'(1) = 3$.

5. Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, la fonction g définie par $g(x) = e^{-f(x)}$:

- est croissante
- est décroissante
- n'est pas monotone.

6. On pose $h(x) = \ln(f(x) + 5)$. Alors la fonction h :

- est décroissante sur $[2 ; +\infty[$
- est positive sur $[2 ; +\infty[$
- n'est pas définie sur $[2 ; +\infty[$.

EXERCICE 2 (sur 5 points)

Pour les candidats suivant l'enseignement de spécialité

Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux.

On sait que :

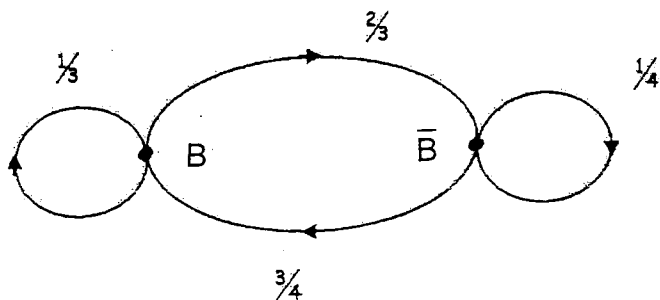
- S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{6}$.
- Si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{2}$.
- S'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il fasse beau est $\frac{1}{2}$.

On note B : «le temps est beau» V : «le temps est variable» P : «le temps est pluvieux».

- Représenter la situation par un graphe probabiliste.
- Donner la matrice de transition de ce graphe.
Les sommets B, V, P seront rangés dans cet ordre.
- Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste dans n jours est défini par la matrice ligne $P_n = (b_n \ v_n \ p_n)$ où b_n désigne la probabilité qu'il fasse beau dans n jours, v_n la probabilité que le temps soit variable dans n jours et p_n la probabilité qu'il pleuve dans n jours.

Aujourd'hui il fait beau, on a donc $P_0 = (1 \ 0 \ 0)$ matrice ligne décrivant l'état initial.
Déterminer la probabilité de chaque type de temps dans 2 jours.

2. Dans une autre région, on note B : «il fait beau» \bar{B} : «il ne fait pas beau».
Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



- Donner la matrice de transition T de ce graphe.
- Soit $Q = (x \ y)$ avec $x + y = 1$.
Déterminer x et y tels que $Q = QT$ et interpréter le résultat.

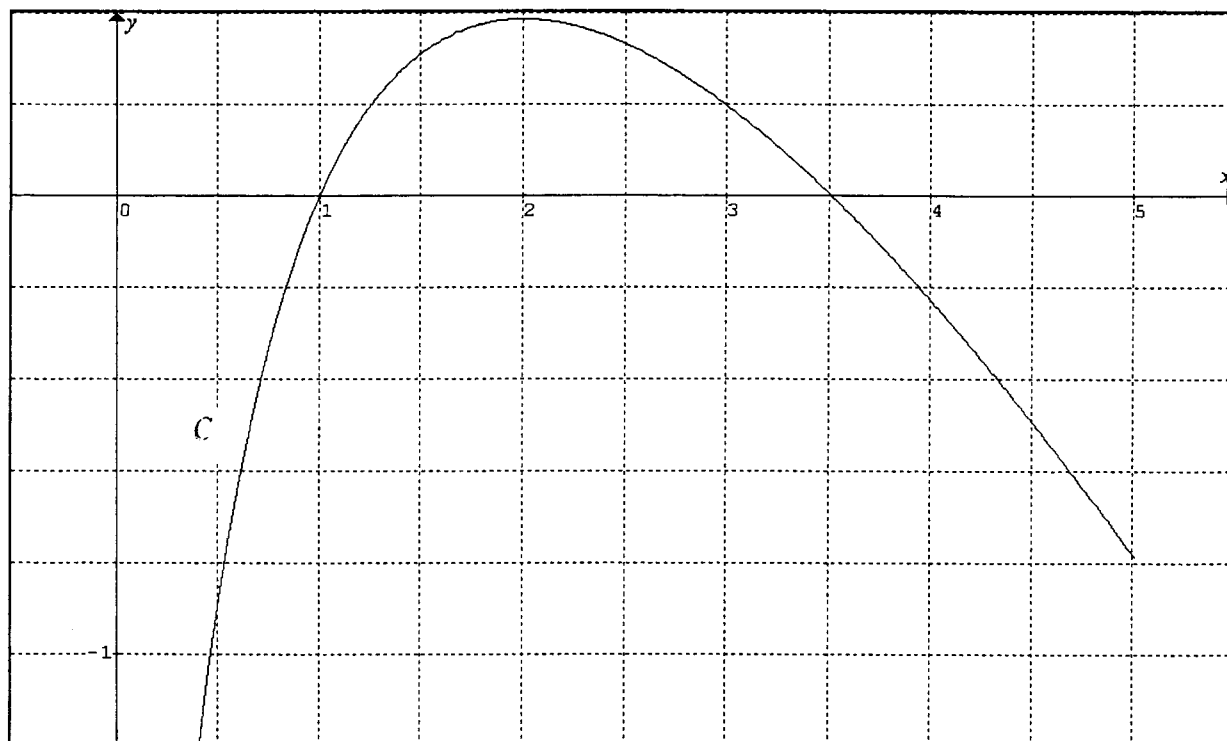
EXERCICE 3 (sur 6 points)

Commun à tous les candidats

On désigne par f la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $f(x) = 1 - x + 2\ln x$.

La courbe C donnée ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées).

- Calculer la limite de f en 0.
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f .
Dresser le tableau des variations de f .
- Calculer $f(1)$.
 - Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[3 ; 4]$ une solution unique α puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de α .
 - En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- On appelle g la fonction définie sur $]0 ; 5]$ par $g(x) = x \left(-\frac{1}{2}x + 2\ln x - 1 \right)$.
 - Montrer que g est une primitive de f sur $]0 ; 5]$.
 - Sur le graphique ci-dessous, on considère le domaine limité par l'axe des abscisses et la partie de la courbe C située au-dessus de cet axe. Montrer que l'aire \mathcal{A} de ce domaine est égale, en unités d'aire, à $g(\alpha) - g(1)$.
 - Calculer une valeur approchée de l'aire \mathcal{A} , exprimée en cm^2 . On utilisera la valeur approchée de α trouvée au 3.b.



EXERCICE 4 (sur 6 points)

Commun à tous les candidats

Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Le tableau ci-dessous donne le PIB de la Chine, en milliards de dollars, entre 1982 et 2002.

Année	1982	1986	1990	1994	1998	2002
Rang x_i de l'année	0	4	8	12	16	20
PIB y_i	280	300	384	546	945	1232

(Source : Le Monde du 26/01/2004)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 1 cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées.
- 2.a. Déterminer l'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
b. Tracer cette droite sur le graphique.
c. Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul le PIB de la Chine en 2004. Commenter le résultat obtenu.
3. On envisage dans cette question un ajustement exponentiel.
En posant $z = \ln y$ on obtient une droite d'ajustement de z en x d'équation $z = 0,08x + 5,46$.
a. On se propose de déterminer alors y en fonction de x sous la forme $y = \alpha e^{\beta x}$ où α et β sont deux réels.
Montrer que $y = 235,10 e^{0,08x}$.
b. Tracer sur le graphique la courbe d'équation $y = 235,10 e^{0,08x}$, pour $x \in [0 ; 24]$.
c. Avec cet ajustement, estimer graphiquement et par le calcul, le PIB de la Chine en 2004.
4. Le PIB de la Chine pour 2004 était de 1650 milliards de dollars (Source internet). Calculer en pourcentage par rapport à la valeur réelle, les erreurs commises en prenant comme PIB les estimations obtenues aux questions 2 et 3.

Annexe – Document réponse à rendre avec la copie

EXERCICE 1 - Commun à tous les candidats

Ne cocher qu'une seule réponse par question

1. Sur l'intervalle $] -5; +\infty [$, l'équation $f(x) = -2$:

- admet une seule solution
- admet deux solutions
- admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $] -5; +\infty [$, la courbe C :

- admet une seule asymptote la droite d'équation $x = -5$
- admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $x = -4,5$ et $y = -5$
- admet exactement deux asymptotes, les droites d'équations $y = -4,5$ et $x = -5$.

3. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 2 est :

- $y = 4$
- $y = 4(x - 2)$
- $x = 4$.

4. On sait que l'équation de la tangente à C au point de coordonnées (1 ; 2) est $y = 3x - 1$. On a :

- $f(2) = 1$
- $f'(1) = -1$
- $f'(1) = 3$.

5. Sur l'intervalle $[2; +\infty [$, la fonction g définie par $g(x) = e^{-f(x)}$:

- est croissante
- est décroissante
- n'est pas monotone.

6. On pose $h(x) = \ln(f(x) + 5)$. Alors la fonction h :

- est décroissante sur $[2; +\infty [$
- est positive sur $[2; +\infty [$
- n'est pas définie sur $[2; +\infty [$.