EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des quatre questions proposées, une seule des trois réponses A, B et C est exacte. Recopier le numéro de chaque question et, en face de celui-ci, indiquer la lettre (A, B ou C) désignant la réponse qui convient. Aucune justification n'est demandée.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point. Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}$ est égale à :

Réponse A : 0.

Réponse B : $+\infty$.

Réponse C : $-\infty$.

2) On considère une fonction u définie, strictement positive et dérivable sur un intervalle I. On note u' sa fonction dérivée.
On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x appartenant à I par : $f(x) = \ln(u(x))$.
Si l'on suppose que u' est négative sur I alors :

Réponse A : on ne peut pas déterminer le sens de variation de la fonction f.

Réponse B : la fonction f est décroissante sur I.

Réponse C : la fonction f est croissante sur I.

3) Dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'ensemble des solutions de l'inéquation $2\ln x - 1 > 1$ est :

Réponse A : $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

Réponse B : $]1\,;+\infty[$.

Réponse C : $]\mathrm{e}\,;+\infty[$.

4) Dans **R,** l'équation $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} - 3 = 0$:

Réponse A : admet une unique solution.

Réponse B : admet exactement deux solutions.

Réponse C : n'admet aucune solution.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un collectionneur de pièces de monnaie a observé que ses pièces peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b. Il prélève au hasard une pièce dans sa collection.

On note A l'événement : « Une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut a ».
On note B l'événement : « Une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut b ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les événements contraires respectifs de A et B.

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0{,}2$; $p(B) = 0{,}1$ et $p(A \cup B) = 0{,}25$.

Dans cet exercice, toutes les valeurs approchées des résultats demandés seront arrondies au centième.

Première partie

1) Démontrer que la probabilité de l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la collection présente les deux défauts » est égale à 0,05.

2) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3) Démontrer que la probabilité de l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la collection ne présente aucun des deux défauts » est égale à 0,75.

4) Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui présentent le défaut b. Calculer la probabilité que cette pièce présente également le défaut a.

5) Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui ne présentent pas le défaut b. Calculer la probabilité que cette pièce présente le défaut a ?

Deuxième partie

On prélève au hasard trois pièces dans la collection et on suppose que le nombre de pièces de la collection est suffisamment grand pour considérer ces trois prélèvements comme étant indépendants.

1) Calculer la probabilité qu'une seule des trois pièces soit sans défaut.

2) Calculer la probabilité qu'au moins une des trois pièces soit sans défaut.

EXERCICE 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Une exploitation minière extrait un minerai rare dans ses gisements depuis l'année 1963.
Le tableau suivant indique la quantité extraite y_i en tonnes durant l'année désignée par son rang x_i :

Année	1963	1968	1973	1978	1983	1988	1993	1998	2003	2008
Rang x_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quantité extraite y_i en tonnes	18,1	15,7	13,3	11	9,3	7,8	7,1	6,1	5,2	4,3

Le nuage de points associé à cette série statistique à deux variables est représenté dans le repère orthogonal (O ; I, J) de **l'annexe 1**. Les unités graphiques de ce repère sont 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.

Dans cet exercice, on désigne par la variable y la quantité extraite en tonnes et par la variable x le rang de l'année.

Première partie

En première approximation, on envisage de représenter y en tant que fonction affine de x.
La droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés admet pour équation $y = -1,5\,x + 16,5$ dans laquelle les deux coefficients sont des valeurs arrondies au dixième.

1) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point dans le repère de **l'annexe 1**.

2) Tracer la droite D dans le repère de **l'annexe 1**.

3) En considérant cet ajustement affine, quelle quantité de minerai, au dixième de tonne près, l'exploitation peut-elle prévoir d'extraire durant l'année 2013 ?

Deuxième partie

On admet que la courbe tracée en **annexe 1** représente un ajustement exponentiel de y en fonction de x et que son équation est de la forme $y = k\,e^{px}$ où k est un entier naturel et p un nombre réel.

1) En utilisant cette courbe, lire la quantité de minerai extrait, au dixième de tonne près, que l'ajustement exponentiel laisse prévoir pendant l'année 2013.

2) En supposant que la courbe passe par les points A (0 ; 18) et B (3 ; 11,2), calculer l'entier naturel k et le réel p dont on donnera une valeur approchée arrondie au centième.

Troisième partie

On effectue le changement de variable $z = \ln y$ et on pose $z_i = \ln y_i$.

1) Recopier et compléter le tableau suivant en donnant une valeur approchée de chaque résultat arrondie au centième :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i										

2) À l'aide de la calculatrice et en donnant une valeur approchée de chaque coefficient arrondie au centième, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

3) En déduire l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\, e^{p\,x}$ et retrouver ainsi, en arrondissant k au dixième, les coefficients k et p calculés à la question **2)** de la deuxième partie.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \dfrac{5e^x}{e^x+1}$.

On désigne par f' la fonction dérivée de f et par F la primitive de f sur **R** qui vérifie $F(0) = 0$.
Dans le repère orthonormal d'unité 2 cm de l'annexe 2, la courbe C_f tracée représente la fonction f et la droite D est sa tangente au point $A\left(0\,;\dfrac{5}{2}\right)$.

Première partie

1) La courbe C_f admet pour asymptotes en $-\infty$ la droite d'équation $y = 0$ et en $+\infty$ la droite d'équation $y = 5$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$.

3) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f sur **R**.

4) En utilisant le résultat de la question 2, déterminer une équation de la droite D.

Deuxième partie

1) Pour tout réel x, exprimer $F(x)$ en fonction de x.

2) Vérifier que $F(1) = 5 \ln \left(\dfrac{e+1}{2}\right)$.

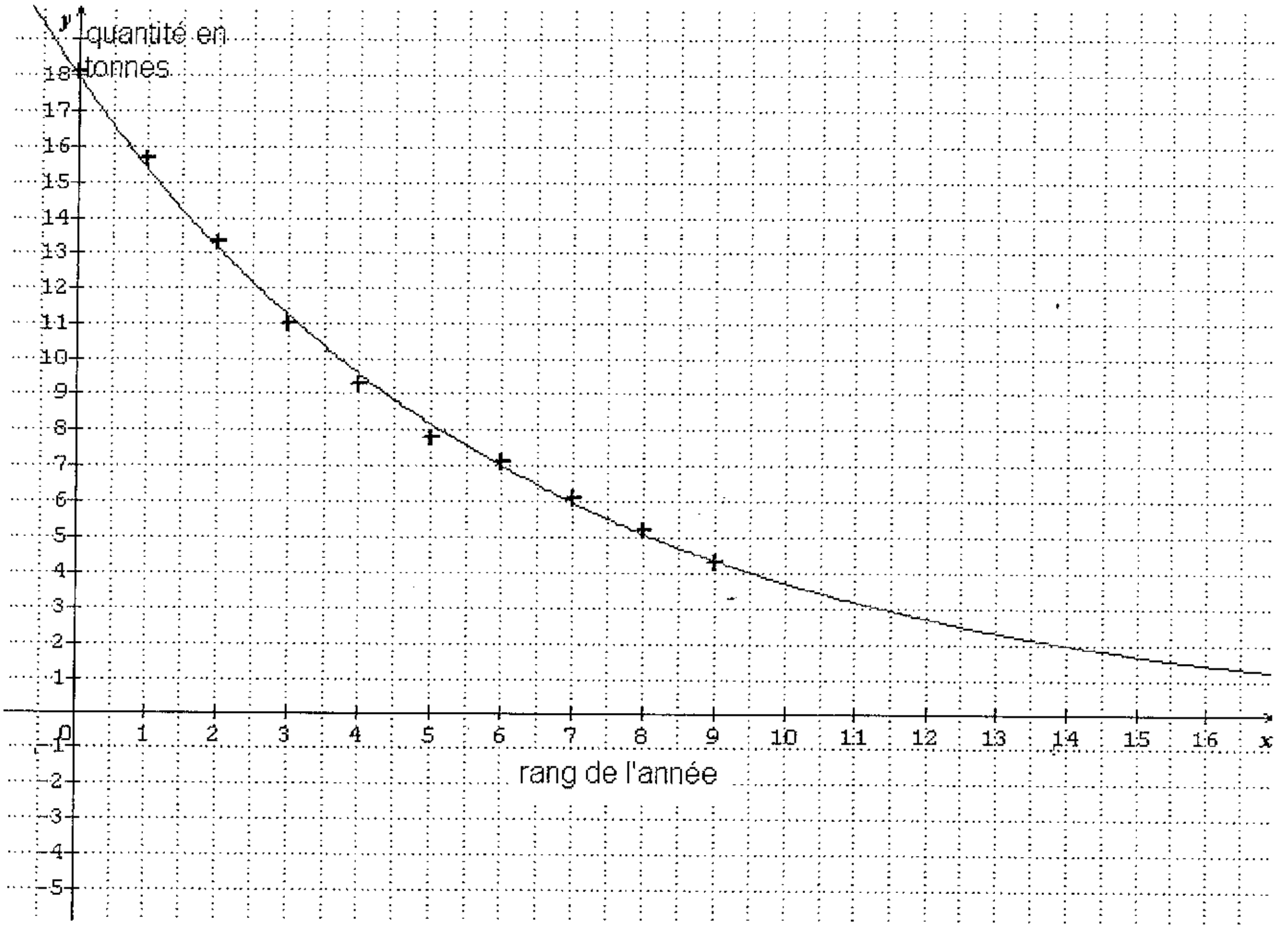
3) Sur **l'annexe 2**, le domaine grisé est délimité par la courbe C_f, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Calculer l'aire, en unités d'aire, de ce domaine et en donner une valeur approchée arrondie au dixième.

ANNEXE 1

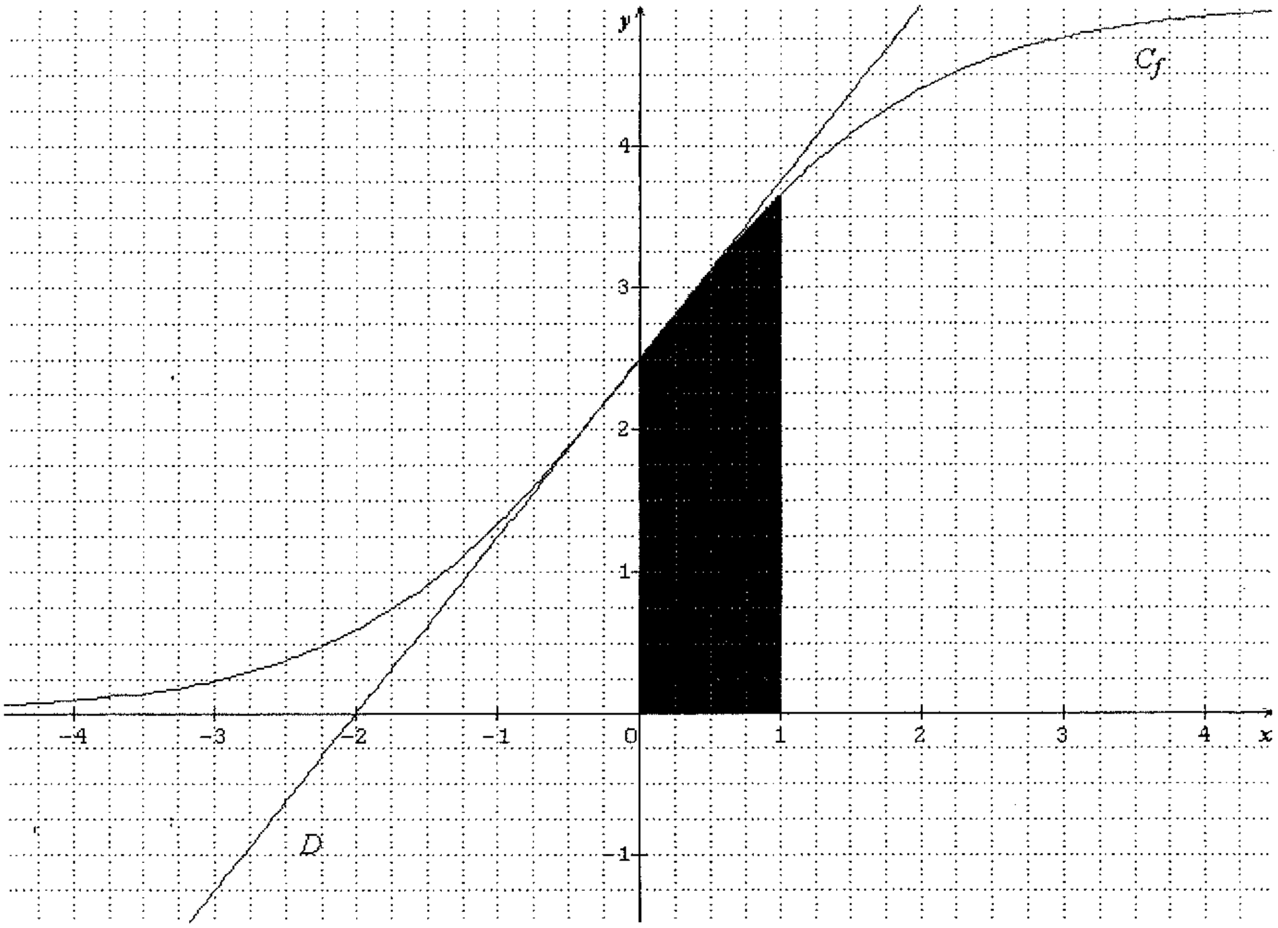
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 3



ANNEXE 2

EXERCICE 4



EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Chaque mois, un institut de sondage donne la cote de popularité d'un même groupe politique dans l'opinion publique. Les personnes sondées sont, soit favorables, soit défavorables à ce groupe. Initialement, il y a autant de personnes favorables à ce groupe politique que de personnes qui lui sont défavorables. De chaque mois au mois suivant, on considère que :

10 % des personnes qui étaient favorables à ce groupe politique ne le sont plus.
15 % des personnes qui n'étaient pas favorables à ce groupe politique le deviennent.

On note, pour tout entier naturel n :

a_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois soit favorable à ce groupe politique.

b_n, la probabilité qu'une personne interrogée au hasard au bout de n mois ne soit pas favorable à ce groupe politique.

$P_n = (a_n \; b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste au bout de n mois.

On note M la matrice de transition telle que, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

Première partie

1) Déterminer la matrice P_0 donnant l'état probabiliste initial.

2) Déterminer le graphe probabiliste correspondant à la situation.

3) On admet que $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice P_2 en détaillant les calculs, (on donnera les coefficients sous forme décimale arrondie au centième).

4) Déterminer l'état stable et interpréter ce résultat.

Deuxième partie

1) Montrer que $a_{n+1} = 0{,}75\ a_n + 0{,}15$ pour tout entier naturel n.

2) On considère la suite (u_n) telle que $u_n = a_n - 0{,}6$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,75.

b) En déduire que $a_n = -0{,}1 \times (0{,}75)^n + 0{,}6$ pour tout entier naturel n.

c) Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$. Comment peut-on interpréter cette limite ? En quoi ce résultat est-il cohérent avec celui demandé à la question **4)** de la première partie.