

SUJET SORTI

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

Durée de l'épreuve : 3 heures.

Coefficient : 5

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'annexe en page 6 est à rendre avec la copie.

1 feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de QUATRE exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)
(Commun à tous les candidats)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une seule réponse par question est acceptée et **aucune justification n'est demandée**.

Une bonne réponse rapporte un point.

Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante.

Question 1

Le nombre -3 est solution de l'équation :

- $\ln x = -\ln 3$
- $\ln(e^x) = -3$
- $e^{\ln x} = -3$
- $e^x = -3$

Question 2

La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-2x^3 + 3x}{(2x-1)^3}$ est :

- $-\infty$
- $+\infty$
- -1
- $-\frac{1}{4}$

Question 3

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.

Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

- $y = x + 2$
- $y = -x + 4$
- $y = 3x + 1$
- $y = x + 3$

Question 4

Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Un joueur donne 3 euros pour participer à ce jeu.

Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est :

- 1
- 0
- -1
- -2

Exercice 2 (5 points)

(Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Une entreprise a équipé chacun de ses employés d'un seul ordinateur.

Pour le suivi de ses ordinateurs, l'entreprise fait appel à un même service de maintenance informatique.

Pour évaluer ce service, l'entreprise réalise une enquête et dispose ainsi, pour chaque employé, d'une fiche précisant la marque de son ordinateur et son avis sur le service de maintenance.

Il y a trois marques d'ordinateurs Aliet, Balart et Celt.

- 25 % des employés ont un ordinateur Aliet,
- 40 % des employés ont un ordinateur Balart,
- le reste des employés a un ordinateur Celt.

L'enquête a fourni les résultats suivants :

- parmi les employés équipés d'un ordinateur Aliet, 90 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Balart, 65 % sont satisfaits du service de maintenance,
- parmi les employés équipés d'un ordinateur Celt, 80 % sont satisfaits du service de maintenance.

On choisit au hasard la fiche d'un employé de l'entreprise, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.

On note :

- A l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet »,
- B l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Balart »,
- C l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé équipé d'un ordinateur Celt »,
- S l'événement : « La fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé équipé d'un ordinateur Aliet et satisfait du service de maintenance.
3. Démontrer que la probabilité que la fiche choisie soit celle d'un employé satisfait du service de maintenance est 0,765.
4. Sachant que la fiche choisie est celle d'un employé satisfait du service de maintenance, calculer la probabilité que cet employé soit équipé d'un ordinateur de la marque Celt.
Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Exercice 3 (5 points)
(Commun à tous les candidats)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01% et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

Partie A : Observation des données

- Pour i entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
 - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
 - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.
- Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009.
- Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 : le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de 2,4% environ.

En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.

Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 du nuage précédent.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i ; y_i)_{4 \leq i \leq 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8,03 \times 1,024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005 + n , n désignant un entier naturel.

On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

- Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
- À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros ?

Exercice 4 (6 points)
(Commun à tous les candidats)

L'annexe 1 est à rendre avec la copie.

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.

Soit x la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.

La fonction d'offre de cet appareil est la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par :

$$f(x) = 153 e^{0,05x}.$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité x , exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par :

$$g(x) = -116 \ln(x + 1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité x , exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

1.
 - a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 35]$.
 - b. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; 35]$.
 - c. Les courbes représentatives respectives C_f et C_g des fonctions f et g , tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe 1 **à rendre avec la copie**.
Lire avec la précision autorisée par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection E .

2. Afin de déterminer les coordonnées du point E de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle $[0 ; 35]$ l'équation $f(x) = g(x)$.
Pour cela, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
 - a. Déterminer le sens de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 35]$.
On pourra utiliser la question 1.
 - b. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $[0 ; 35]$.
 - c. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de x_0 au millième.
 - d. On pose $y_0 = f(x_0)$. En utilisant la question précédente, calculer l'arrondi de y_0 au centième.
 - e. Sachant que y_0 représente le prix unitaire d'équilibre de cet appareil, préciser ce prix à un centime d'euro près. Quel est le nombre d'appareils disponibles à ce prix ?

3. On prendra dans cette question $x_0 = 8,871$ et $y_0 = 238,41$.
 - a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 35]$.
 - b. On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel S défini par la formule :

$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx.$$

Hachurer, sur le graphique de la feuille annexe 1 **à rendre avec la copie**, le domaine du plan dont l'aire en unités d'aire est le nombre réel S .

Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre réel S .

ANNEXE 1 : à rendre avec la copie

Exercice 4 : commun à tous les candidats

