# SUJET SORTI

## BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

## MATHÉMATIQUES

**Série : ES**

SPECIALITE

*Durée de l'épreuve : 3 heures.*

*Coefficient : 7*

***Ce sujet comporte pages numérotées de 1 à 6.***

***L'annexe en page 6 est à rendre avec la copie.***

*1 feuille de papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le sujet est composé de QUATRE exercices indépendants.*
*Le candidat doit traiter tous les exercices.*

*Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1** (4 points)
*(Commun à tous les candidats)*

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.*
*Une seule réponse par question est acceptée et* ***aucune justification n'est demandée****.*
*Une bonne réponse rapporte un point.*
*Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.*

**Indiquer sur la copie le numéro** de la question **et la réponse choisie** correspondante.

**Question 1**
Le nombre $-3$ est solution de l'équation :

- $\ln x = -\ln 3$
- $\ln(e^x) = -3$
- $e^{\ln x} = -3$
- $e^x = -3$

**Question 2**
La limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]\frac{1}{2}\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-2x^3+3x}{(2x-1)^3}$ est :

- $-\infty$
- $+\infty$
- $-1$
- $-\dfrac{1}{4}$

**Question 3**
Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$.
Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

- $y = x + 2$
- $y = -x + 4$
- $y = 3x + 1$
- $y = x + 3$

**Question 4**
Un jeu consiste à lancer une fois un dé cubique non pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
**Un joueur donne 3 euros** pour participer à ce jeu.
Il lance le dé et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure de ce dé :

- si le numéro est 1, le joueur reçoit 10 euros,
- si le numéro est 2 ou 4, il reçoit 1 euro,
- sinon, il ne reçoit rien.

À ce jeu, l'espérance mathématique du gain algébrique, exprimée en euros, est :

- 1
- 0
- $-1$
- $-2$

**Exercice 2** (5 points)

*(Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)*

Un équipementier fabrique pour une usine de l'industrie automobile deux types de sièges : un modèle "luxe" et un modèle "confort".
Soit $x$ le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges "luxe" et $y$ le nombre, exprimé **en centaines**, de sièges "confort" produits chaque mois.
La fonction coût mensuel de production est la fonction $F$ définie pour $x$ et $y$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 3]$ par :

$$F(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6.$$

$F(x, y)$ désigne le coût mensuel de production, exprimé **en dizaines de milliers d'euros,** pour $x$ **centaines** de sièges "luxe" et pour $y$ **centaines** de sièges "confort".

**1.** Au mois de janvier 2010, l'équipementier a produit 120 sièges "luxe" et 160 sièges "confort". Justifier que le coût de production mensuel a été 12 000 euros.

**2.** Vérifier que, $x$ et $y$ étant deux nombres réels, $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$.
En déduire que le coût de production mensuel minimal est 10 000 euros.
Préciser pour quelles quantités mensuelles respectives de sièges " luxe " et " confort " produites ce coût de production est obtenu.

**3.** À partir du mois de juillet 2010, la production mensuelle prévue de sièges est exactement 250.

**a.** Justifier que $y = 2,5 - x$.
Démontrer que, sous cette condition, le coût de production mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, est égal à $2x^2 - 3x + 2,25$.

**b.** On note $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2,5]$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 2,25$.
Dresser en le justifiant le tableau de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 2,5]$.

**c.** En déduire les quantités mensuelles respectives de sièges " luxe " et " confort " que l'équipementier doit produire à partir du mois de juillet 2010 pour minimiser le coût mensuel de production. Préciser ce coût minimal.

**Exercice 3** (5 points)
*(Commun à tous les candidats)*

Pour $i$ nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

| Année | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| SMIC horaire brut (en euros), $y_i$ | 6,67 | 6,83 | 7,19 | 7,61 | 8,03 | 8,27 | 8,44 | 8,71 | 8,82 |

*Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01% et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.*

**Partie A : Observation des données**

1. Pour $i$ entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
   - on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.
2. Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009.
3. Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

*On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 : le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de 2,4% environ.*
*En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.*
*Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points $M_4$, $M_5$, $M_6$, $M_7$ et $M_8$ du nuage précédent.*

**Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)_{4 \le i \le 8}$ par un ajustement exponentiel**

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8{,}03 \times 1{,}024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année 2005 + $n$, $n$ désignant un entier naturel.
On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1. Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.
2. À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros ?

**Exercice 4** (6 points)
*(Commun à tous les candidats)*

**L'annexe 1 est à rendre avec la copie.**

Un nouveau modèle de mini-ordinateur portable est mis sur le marché.
Soit $x$ la quantité d'appareils pouvant être vendus, exprimée **en milliers**.

La fonction d'offre de cet appareil est la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$f(x) = 153\ \mathrm{e}^{0{,}05\,x}\ .$$

Le nombre réel $f(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, proposé par les fournisseurs, en fonction de la quantité $x$, exprimée en milliers, d'appareils pouvant être vendus.

La fonction de demande de cet appareil est la fonction $g$ définie sur l'intervalle [0 ; 35] par :

$$g(x) = -116\ \ln(x + 1) + 504.$$

Le nombre réel $g(x)$ désigne le prix unitaire en euros d'un appareil, accepté par les consommateurs, en fonction de la quantité $x$, exprimée en milliers, d'appareils disponibles.

**1.** **a.** Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 35].

**b.** Démontrer que la fonction $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 35].

**c.** Les courbes représentatives respectives $C_f$ et $C_g$ des fonctions $f$ et $g$, tracées dans un repère orthogonal, sont fournies en annexe 1 **à rendre avec la copie**.
Lire avec la précision autorisée par le graphique une valeur approchée des coordonnées de leur point d'intersection $E$.

**2.** Afin de déterminer les coordonnées du point $E$ de façon précise, on est amené à résoudre dans l'intervalle [0 ; 35] l'équation $f(x) = g(x)$.
Pour cela, on considère la fonction $h$ définie sur l'intervalle [0 ; 35] par $h(x) = f(x) - g(x)$.

**a.** Déterminer le sens de variation de la fonction $h$ sur l'intervalle [0 ; 35].
*On pourra utiliser la question 1.*

**b.** Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $x_0$ dans l'intervalle [0 ; 35].

**c.** À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi de $x_0$ au millième.

**d.** On pose $y_0 = f(x_0)$. En utilisant la question précédente, calculer l'arrondi de $y_0$ au centième.

**e.** Sachant que $y_0$ représente le prix unitaire d'équilibre de cet appareil, préciser ce prix à un centime d'euro près. Quel est le nombre d'appareils disponibles à ce prix ?

**3.** On prendra dans cette question $x_0 = 8{,}871$ et $y_0 = 238{,}41$.

**a.** Déterminer une primitive $F$ de la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 35].

**b.** On appelle surplus des fournisseurs le nombre réel $S$ défini par la formule :

$$S = x_0 \times y_0 - \int_0^{x_0} f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Hachurer, sur le graphique de la feuille annexe 1 **à rendre avec la copie**, le domaine du plan dont l'aire en unités d'aire est le nombre réel $S$.
Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre réel $S$.

**ANNEXE 1 : à rendre avec la copie**

Exercice 4 : *commun à tous les candidats*