

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 7

**SPÉCIALITÉ**

Ce sujet comporte 6 pages dont 1 feuille DOCUMENT RÉPONSE.

**L'utilisation d'une calculatrice est autorisée**

*Le candidat doit traiter les quatre exercices.*

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**La feuille DOCUMENT RÉPONSE est à rendre avec la copie.**

**Note importante :**

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

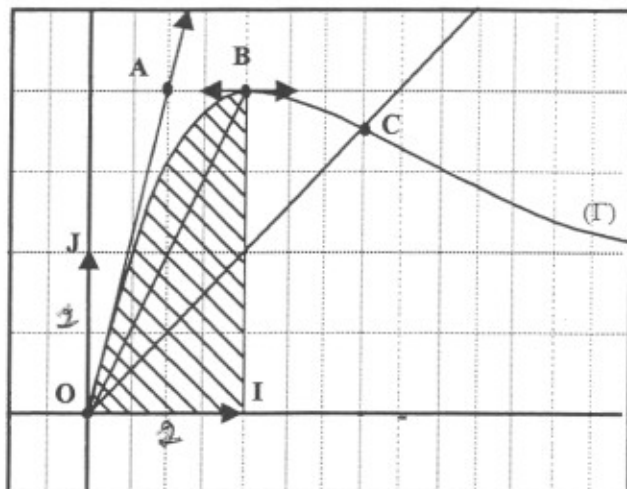
Si le sujet est incomplet, demandez en immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

## EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormal du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 2 cm, la courbe  $(\Gamma)$ , tracée ci dessous, est la représentation graphique d'une fonction  $g$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; 3,5]$ .

- I et J sont les points du plan tels que  $\overline{OI} = \vec{i}$  et  $\overline{OJ} = \vec{j}$ .
- C est le point de  $(\Gamma)$  situé sur la bissectrice de l'angle  $\widehat{IOJ}$ .
- $(OA)$  est la tangente en O à  $(\Gamma)$ ,
- $\mathcal{S}$  est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



1) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

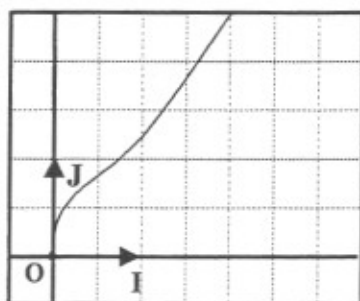
- a) Quel est le tableau de variation de  $g$  sur  $[0; 3,5]$  ?
- b) Quelles sont les valeurs de  $g'(0)$  et de  $g'(1)$  ?
- c) Quelles sont les coordonnées du point C ?
- d) Résoudre l'inéquation  $g(x) \geq x$  sur  $[0; 3,5]$

2) Définir la surface  $\mathcal{S}$  par un système d'inéquations et déterminer graphiquement un encadrement de l'aire de  $\mathcal{S}$  d'amplitude 2 cm<sup>2</sup>.

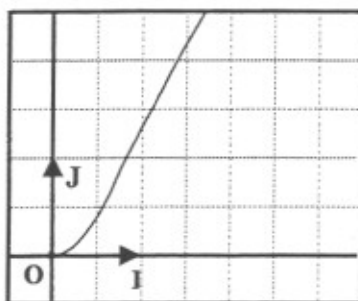
Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule :  $A = \frac{(B + b) \times h}{2}$  où B et b sont les bases du trapèze et h sa hauteur.

3) On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction  $g$  s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.

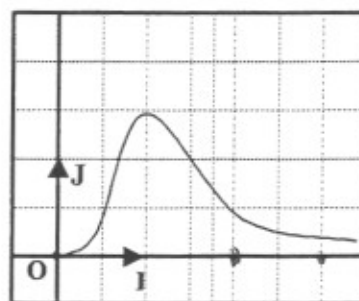
Courbe n° 1



Courbe n° 2



Courbe n° 3



## EXERCICE 2 (5 points)

Pour les candidats ayant suivi la spécialité mathématique

Utiliser le DOCUMENT RÉPONSE DONNÉ EN ANNEXE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on désigne par  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tel que  $z = 3xy$ . On dit  $\mathcal{S}$  est la surface d'équation  $z = 3xy$ .

Une courbe de niveau de cote  $z_0$  est l'intersection d'un plan d'équation  $z = z_0$ , parallèle au plan  $(xOy)$  avec la surface  $\mathcal{S}$ . On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse  $x_0$  et une courbe de niveau d'ordonnée  $y_0$ .

- 1) Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse  $\frac{3}{2}$  et d'abscisse 2.

Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan  $(yOz)$  sur la figure 1 du document réponse.

- 2) a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?  
b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
- 3) Sur la figure 2 sont représentées trois courbes  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  représentant les projections orthogonales dans le plan  $(xOy)$  de trois courbes de niveau de cote constante  $k$ .  
Préciser, en le justifiant, la valeur de  $k$  associée à chaque courbe.
- 4) Le point  $A'$  représenté sur la courbe  $C_2$  de la figure 2 est la projection orthogonale dans le plan  $(xOy)$  d'un point  $A(x, y, z)$ , de la surface  $\mathcal{S}$ .  
a) Déterminer les coordonnées du point  $A$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
b) Préciser les coordonnées du point  $A''$ , projeté orthogonal de  $A$  dans le plan  $(yOz)$  puis placer ce point  $A''$  sur la figure 1.
- 5) Soit  $\mathbf{P}$  le plan d'équation  $3x + 6y - z - 6 = 0$ .  
a) Montrer que le point  $A$  appartient au plan  $\mathbf{P}$ .  
b) Montrer que le plan  $\mathbf{P}$  contient la courbe de niveau d'abscisse 2.  
c) Démontrer que l'intersection de la surface  $\mathcal{S}$  et du plan  $\mathbf{P}$  est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.  
On pourra utiliser la factorisation  $x + 2y - xy - 2 = (x - 2)(1 - y)$ .

### EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Tableau d'informations n° 1.

|                  |           |      |               |     |           |
|------------------|-----------|------|---------------|-----|-----------|
| $x$              | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |
| Signe de $u(x)$  | +         | 0    | -             | -   | +         |
| Signe de $u'(x)$ | -         | -    | 0             | +   | +         |

Le tableau d'informations n° 1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction  $u$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1) Établir un tableau des variations de la fonction  $u$ .

On considère maintenant les fonctions  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = \ln(u(x))$  et  $g(x) = e^{u(x)}$  où  $u$  désigne la fonction de la question précédente.

2) a) Une des deux affirmations suivantes est fautive, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :

Affirmation 1 : « La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  »

Affirmation 2 : « La fonction  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}$  » ✓

b) Donner les variations des fonctions  $f$  et  $g$ . Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).

c) Déterminer, en justifiant avec soin,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$ .

d) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $g(x) = 1$ .

3) Voici d'autres informations relatives à la fonction  $u$  et à sa dérivée  $u'$ .

Tableau d'informations n° 2.

|         |      |      |                |     |     |
|---------|------|------|----------------|-----|-----|
| $x$     | $-2$ | $0$  | $\frac{1}{2}$  | $2$ | $3$ |
| $u(x)$  | $4$  | $-2$ | $-\frac{9}{4}$ | $0$ | $4$ |
| $u'(x)$ | $-5$ | $-1$ | $0$            | $3$ | $5$ |

Terminer chacune des deux phrases a) et b) par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

a) La tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 2 est parallèle :

|                         |                                  |                                   |
|-------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| • à l'axe des abscisses | • à la droite d'équation $y = x$ | • à la droite d'équation $y = 3x$ |
|-------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|

b) Le nombre  $f'(-2)$  :

|                |              |                       |                       |                      |
|----------------|--------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| • n'existe pas | • vaut $-20$ | • vaut $-\frac{4}{5}$ | • vaut $-\frac{5}{4}$ | • vaut $\frac{5}{4}$ |
|----------------|--------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|

## EXERCICE 4 (6 points)

### Commun à tous les candidats

On propose aux élèves, Quentin, Nicolas et Lucien de répondre à un Q.C.M. comportant 4 questions dont voici le barème et les instructions :

Pour chaque question, une seule des quatre propositions A, B, C ou D est exacte.

L'élève recopie sur sa feuille une grille de réponses présentée comme ci-dessous :

| Question | Réponse :<br>A, B, C, D |
|----------|-------------------------|
| 1        |                         |
| 2        |                         |
| 3        |                         |
| 4        |                         |

Une bonne réponse rapporte 1 point ; une mauvaise réponse enlève 0,5 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total de points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

### Les trois candidats répondent correctement à la première question.

- 1) Quentin choisit de ne pas répondre à la question n° 2 et de donner une réponse à chacune des deux dernières questions, en choisissant au hasard et de façon équiprobable, l'une des 4 réponses proposées.
  - a) Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
  - b) Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
  - c) Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
  - d) Quelle probabilité a-t-il de faire deux fautes ?
  - e) Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité.  
En déduire l'espérance mathématique de la note obtenue.
  
- 2) Nicolas adopte la stratégie de donner une réponse à chacune des trois dernières questions en choisissant au hasard et de façon équiprobable l'une des 4 réponses proposées.
  - a) Quelles notes peut-il obtenir à ce Q.C.M. ?
  - b) Combien de grilles différentes peut-il remplir ?
  - c) Quelle probabilité a-t-il de ne faire aucune faute ?
  - d) Quelle probabilité a-t-il de faire trois fautes ?
  - e) Construire un tableau qui associe, à chaque total de points, sa probabilité.  
En déduire l'espérance mathématique de la note obtenue.
  
- 3) Lucien choisit de ne répondre à aucune des trois dernières questions.  
Classer les stratégies de Quentin, Nicolas et Lucien.