BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SÉRIE ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7**

SPECIALITE

Ce sujet comporte 8 pages
dont 2 feuilles **ANNEXE 1 (page 7/8) et ANNEXE 2 (page 8/8).**

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

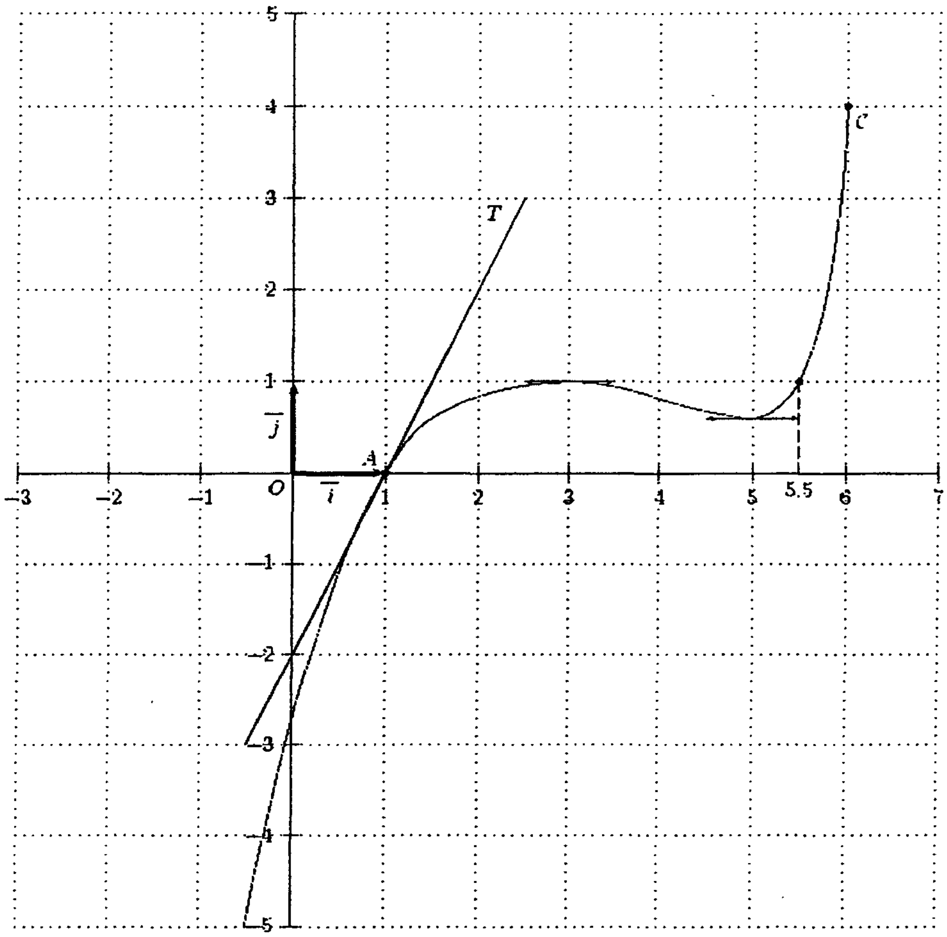
Les feuilles ANNEXE 1 et ANNEXE 2 sont à rendre avec la copie.

Note importante :

Dès que le sujet de l'épreuve vous est remis, assurez-vous qu'il est complet, en vérifiant le nombre de pages en votre possession.

Si le sujet est incomplet, demandez immédiatement un nouvel exemplaire aux surveillants d'épreuve.

EXERCICE 1 : Commun à tous les candidats (4 points)



On considère la représentation graphique C de la fonction f définie et dérivable sur $]-\infty \,;\, 6]$.
La fonction dérivée de f est notée f'. La droite T est la tangente à C au point d'abscisse 1.
On admet que la courbe C est située sous cette tangente T sur $]-\infty \,;\, 6]$.

On répondra au QCM ci-après en s'appuyant sur les informations données par le graphique.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.
Une bonne réponse apporte 0,5 point, une mauvaise enlève 0,25 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à 0.

COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE.

Partie A

Questions	
1. L'équation réduite de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 est	☐ $y = x - 1$
	☐ $y = x - 2$
	☐ $y = 2(x-1)$
2. L'équation $f'(x) = 0$ admet	☐ 1 solution
	☐ 2 solutions
	☐ 0 solution
3. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est	☐ $-\infty$
	☐ -5
	☐ 6
4. La fonction $\ln f$ est définie sur	☐ $]-\infty ; 6]$
	☐ $]0 ; 6]$
	☐ $]1 ; 6]$
5. La fonction $\ln f$ s'annule exactement	☐ 1 fois
	☐ 2 fois
	☐ 0 fois

Partie B

Dans cette partie du QCM, on appelle g la fonction définie sur $]-\infty ; 6]$ par son expression $g(x) = \exp(f(x))$.

Questions	
6. La fonction g est strictement croissante sur	☐ $]-\infty ; 3]$
	☐ $]1 ; 6]$
	☐ $]-\infty ; 6]$
7. $g'(1)$ est égal à	☐ 2
	☐ 0
	☐ $2e$
8. La fonction g s'annule exactement	☐ 1 fois
	☐ 2 fois
	☐ 0 fois

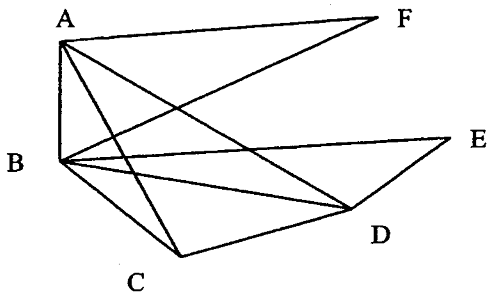
<u>EXERCICE 2 :</u> Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité (5 points)

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville.
Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

A. Eau	B. Economie d'énergies	C. Plantations et cultures locales
D. Développement durable	E. Biotechnologies	F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.

Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).



Question préliminaire :
Si un visiteur répond à tous les questionnaires, à combien de questionnaires aura-t-il répondu ?

Partie A :

1. Donner la matrice G associée à ce graphe.
1. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
2. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :

   a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?

   b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

   (Dans les deux cas, a et b, justifiez votre réponse.)

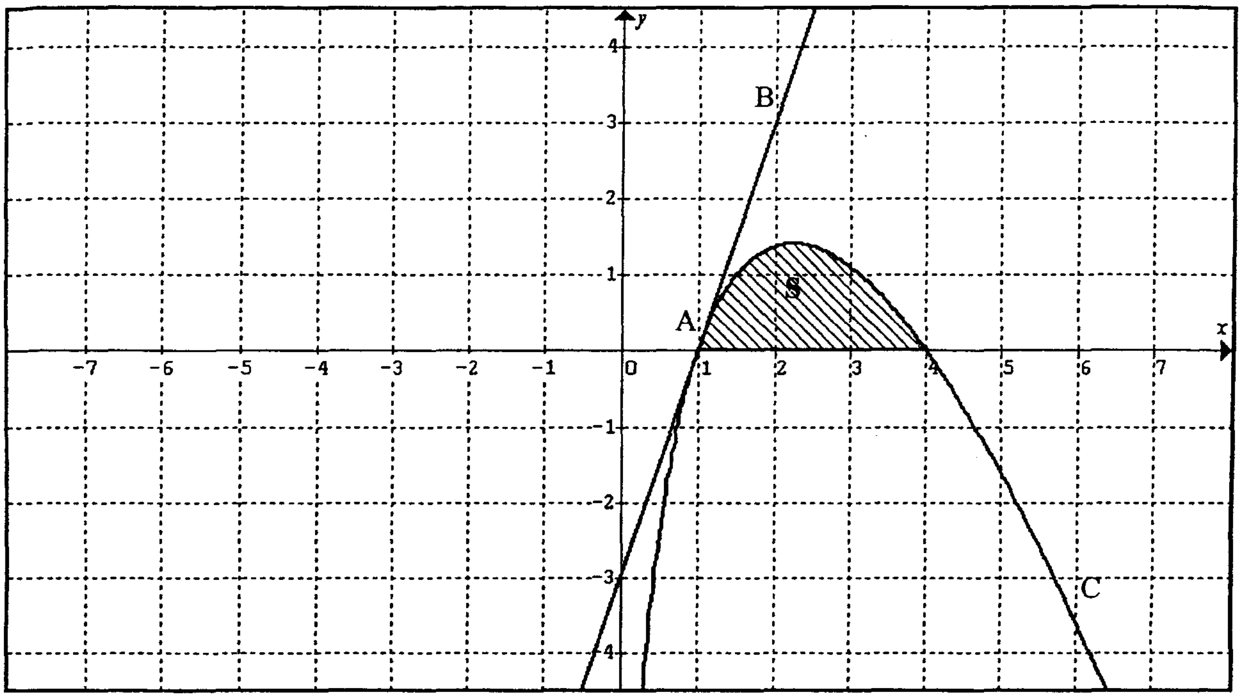
Partie B :

Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.

Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).

1. Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
2. Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.

EXERCICE 3 : **Commun à tous les candidats (5 points)**



On considère la fonction f dont la courbe représentative C est représentée ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthonormal.

f est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe C passe par le point A (1 ; 0) et admet la droite (AB) pour tangente à la courbe en A.

Partie A

Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f(x)=(ax+b)\ln x$ où a et b sont deux réels.

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b.

2. Sans justifier et par lecture graphique, donner $f(4)$ et $f'(1)$.

3. Justifier que a et b sont solutions du système d'équations suivant : $\begin{cases} 4a+b=0 \\ a+b=3 \end{cases}$

   Déterminer a et b.

Partie B

On admet que la fonction précédente est définie pour tout x de $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(4-x)\ln x$.

On appelle S l'aire hachurée sous la courbe C.

3. Soit F la fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}-8x\ln x+8x)$

   Montrer que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$

4. En déduire la valeur exacte de $I=\displaystyle\int_1^4 f(x)dx$.

5. Donner une valeur arrondie à 10^{-1} de S exprimée en unités d'aire. Justifier.

EXERCICE 4 : Commun à tous les candidats (6 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de ménages (en milliers) équipés d'un ordinateur entre les années 1986 et 1996.

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de ménages y_i	160	235	345	510	760	1160	1780	2600	3850	5400	7300

Partie A

1. Calculer le pourcentage d'évolution du nombre de ménages équipés d'un ordinateur entre les années 1986 et 1987.

2. Si ce pourcentage était resté le même d'année en année jusqu'en 1996, quel aurait été le nombre de ménages équipés en 1996 ? (on arrondira au millier).

3. On pose $z = \ln y$

   a) Compléter le tableau **donné en ANNEXE 2** (arrondir les valeurs au centième).

   b) Construire le nuage de points $M_i(x_i\,;\,z_i)$ pour i allant de 0 à 10 dans le repère **donné en ANNEXE 2**

   c) Donner une équation de la droite d d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite dans le repère précédent

   d) Déduire de ce qui précède que l'on peut modéliser l'expression de y en fonction de x sous la forme $y = \mathrm{a}e^{\mathrm{b}x}$, a étant un réel arrondi à l'entier le plus proche, et b un réel arrondi au centième.
   En déduire dans ce cas, une estimation arrondie au millier du nombre des ménages qui auraient dû être équipés en 2000.

Partie B

En fait le nombre de ménages équipés en 2000 est de 15 400 000.
On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{20}{1+2000e^{-0{,}44t}}$.

On estime alors que sur la période de 1980 à 2015 l'équipement des ménages en ordinateur peut être modélisé par la fonction f définie ci-dessus.
Ainsi, le nombre de ménages équipés en $1980+n$, exprimé en millions, est donné par $f(n)$.

1. Déterminer une estimation arrondie au millier du nombre des ménages équipés en 2002 puis en 2003.

2. Prouver que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. a) En quelle année le nombre de ménages équipés a-t-il atteint 18 millions selon l'estimation ?
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 1
(commun à tous les candidats)

Partie A

Questions	
1. L'équation réduite de la tangente T à C au point A d'abscisse 1 est	☐ $y=x-1$
	☐ $y=x-2$
	☐ $y=2(x-1)$
2. L'équation $f'(x)=0$ admet	☐ 1 solution
	☐ 2 solutions
	☐ 0 solution
3. La limite de $f(x)$ en $-\infty$ est	☐ $-\infty$
	☐ -5
	☐ 6
4. La fonction $\ln f$ est définie sur	☐ $]-\infty\,;6]$
	☐ $]0\,;6]$
	☐ $]1\,;6]$
5. La fonction $\ln f$ s'annule exactement	☐ 1 fois
	☐ 2 fois
	☐ 0 fois

Partie B

Rappel : g la fonction définie sur $]-\infty\,;6]$ par son expression $g(x)=\exp(f(x))$.

Questions	
6. La fonction g est strictement croissante sur	☐ $]-\infty\,;3]$
	☐ $]1\,;6]$
	☐ $]-\infty\,;6]$
7. $g'(1)$ est égal à	☐ 2
	☐ 0
	☐ $2e$
8. La fonction g s'annule exactement	☐ 1 fois
	☐ 2 fois
	☐ 0 fois

ANNEXE 2 **A RENDRE AVEC LA COPIE**

Exercice 4
(commun à tous les candidats)

Année	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \ln y_i$