BACCALAUREAT GENERAL

session 2004

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (3 points)

x	$-\infty$		-2		1		α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$		
variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$+\infty$

On a donné le tableau de variation d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]-2\,;\,+\infty[$, où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha) = 0$.
On appelle C la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est VRAIE ou si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS CONCLURE. Aucune justification n'est demandée.
Le barème est le suivant : 0,5 point par réponse exacte ; - 0,25 point par réponse fausse ; 0 point pour absence de réponse. Cet exercice sera noté entre 0 et 3 ; il n'y aura pas de note globale négative.

1) La droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe C.

2) L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions.

3) $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in\,]-5\,;\,-2[$.

4) Sachant que α appartient à l'intervalle $]1\,;2[$, on a $\int_{\alpha}^{2} f(x)dx < 0$.

5) Les primitives de f sont croissantes sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$.

6) Si $-2<x<1$ et $\alpha<x'$ alors $f(x) < f(x')$.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, indépendantes les unes des autres, il est proposé quatre réponses dont une seule est exacte. Donnez la bonne réponse en justifiant votre choix.

1) $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right) = L$

A) $L = 0$ B) $L = \ln 2$ C) $L = \ln 5$ D) $L = 0{,}7$.

2) La courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x-2 + \frac{3e^x}{e^x-1}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

A) $y = x+1$ B) $y = x-2$ C) $y = x$ D) $y = 3$.

3) $I = \int_0^1 e^{2x+1}dx$.

A) $I = \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e$ B) $I = e^3 - 1$ C) $I = 0$ D) $I = 2e^3 - 2e$.

4) Dans un lycée 45% des élèves de Terminale sont des garçons. Les élèves de ce lycée étudient l'anglais, l'allemand ou l'espagnol en première langue vivante.

70% des élèves étudient l'anglais,
20% des garçons étudient l'allemand,
40% des élèves qui étudient l'anglais sont des garçons,
il y a autant de garçons que de filles qui étudient l'espagnol .

A l'aide d'un tableau ou d'un arbre, répondre aux questions suivantes :

a) Quel est le pourcentage des garçons qui étudient l'anglais ?

A) 42% B) 28% C) 18 % D) 52% .

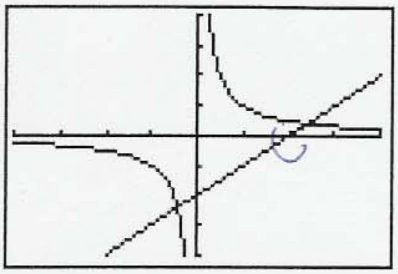
b) On choisit au hasard la fiche d'un élève parmi ceux qui ne pratiquent pas l'allemand. Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui étudie l'espagnol ?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{4}{43}$ C) $\frac{8}{55}$ D) $\frac{5}{16}$.

Exercice 3 (pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) (5 points)

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x-2$ où l'inconnu est un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

1) Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x-2$.



Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0;+\infty[$?

2) Un second élève considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$.

a) Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition .

b) On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3) Un troisième élève dit : « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

Exercice 4 (8 points)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - 1$.

1) a) On admet que la limite de g en $-\infty$ est -1. Le tableau ci-dessous est le tableau de variation de g. Justifier toutes les affirmations qui sont notées dans ce tableau :

x	$-\infty$		-1	α	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\frac{1}{e}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

b) On admet que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2) On note f la fonction définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = e^x - \ln x\ .$$

a) Etudier la limite de f en 0.

b) Vérifier que, pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, où f' est la fonction dérivée de f.

c) Dresser le tableau de variation de f, en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

3) Soit C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. Prendre 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
Tracer C, en prenant 0,6 comme valeur approchée de α.

4) On note D l'ensemble des points M(x; y) du plan muni du repère ci-dessus tels que: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

a) Hachurer l'ensemble D.

b) Vérifier que la fonction U définie sur $]0\,;+\infty[$ par $U(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

c) En déduire une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

d) Calculer l'aire de D en unités d'aire. Puis en donner une valeur approchée en cm^2 à 10^{-2} près.