BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*3 points*)

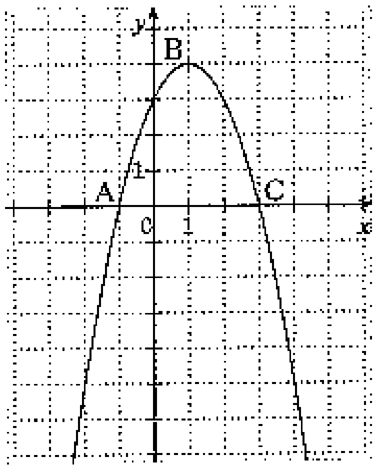
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

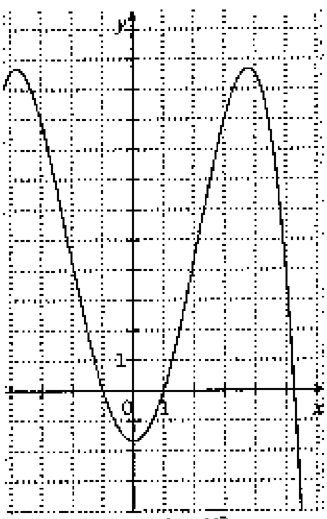
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, il est ramené à zéro.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 6]$, dont la courbe est représentée sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormé.

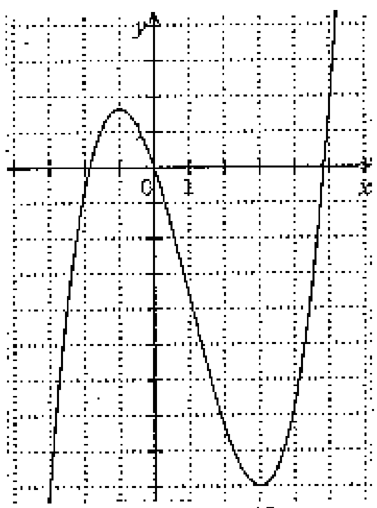
   Les points A $(-1 ; 0)$, B $(1 ; 4)$ et C $(3 ; 0)$ appartiennent à la représentation graphique de f.



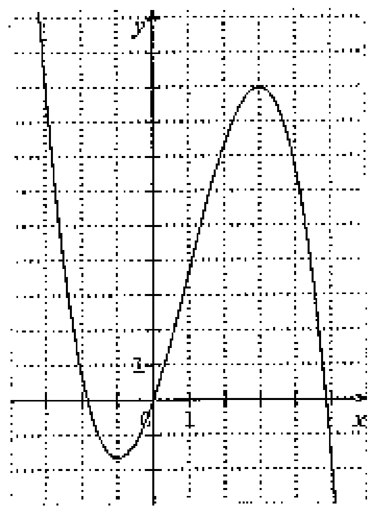
Parmi les trois courbes suivantes, laquelle est la représentation graphique d'une primitive de la fonction f ?



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$

2. Une primitive de la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels **R** par $g(x) = xe^x$ est la fonction G définie sur **R** par :

- $G(x) = \dfrac{x^2}{2}e^x$ • $G(x) = (x + 1)e^x$ • $G(x) = (x - 1)e^x$

3. La fonction h définie sur l'ensemble des nombres réels **R** par $h(x) = 0{,}8^x$ est égale à la fonction k définie sur **R** par :

- $k(x) = e^{x \ln(0{,}8)}$ • $k(x) = e^{0{,}8 \ln(x)}$ • $k(x) = 0{,}8\, e^x$

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Dans le service informatique d'une société, chaque informaticien a le choix entre deux logiciels de gestion : d'une part, le logiciel Bestmath, leader du marché, et d'autre part le logiciel Aurora, son concurrent. Le chef de réseau informatique enregistre chaque année, en janvier, le nombre d'utilisateurs des deux logiciels et fournit des rapports réguliers sur le comportement des utilisateurs.
Lors de l'enquête de janvier 2009, la probabilité qu'un informaticien pris au hasard utilise le logiciel Aurora est 0,32.
Lors de l'enquête suivante en janvier 2010, il a été constaté que 20% des utilisateurs d'Aurora avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Bestmath, tandis que 25% des utilisateurs de Bestmath avaient changé de logiciel et utilisaient désormais Aurora.

On interroge un informaticien au hasard et on définit les événements suivants :
A_1 : « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la première année » ;
B_1: « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la première année » ;
A_2 : « la personne interrogée a choisi le logiciel Aurora la deuxième année » ;
B_2 ; « la personne interrogée a choisi le logiciel Bestmath la deuxième année ».

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Calculer la probabilité qu'un informaticien utilise le logiciel Bestmath la première et la deuxième année.

3. Vérifier que la probabilité de l'événement B_2 est $p(B_2) = 0,574$.

4. Calculer la probabilité qu'un informaticien ait utilisé le logiciel Bestmath la première année, sachant qu'il l'utilise la deuxième année (on donnera le résultat arrondi au millième).

5. On interroge au hasard et de façon indépendante trois informaticiens du service.
   a. Calculer la probabilité qu'au moins un des trois informaticiens ait utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près).
   b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Calculer la probabilité qu'exactement deux des trois informaticiens aient utilisé le logiciel Aurora la deuxième année (on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près).

Exercice 3 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Dans le cadre de son action en faveur du développement durable, le Conseil Régional de d'une région A de France métropolitaine rassemble et analyse des données sur la circulation des déchets valorisables par le recyclage. Depuis 2000, le Ministère de l'Environnement fournit des données statistiques sur les quantités de déchets exportés de la région A en vue de leur valorisation.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
Déchets exportés y_i (en tonnes) $1 \leqslant i \leqslant 7$	797	816	1140	1921	2199	3165	4195

Source : Ministère de l'Environnement (MEEDDAT)

1. Sur la feuille de papier millimétré jointe, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 7)$, le plan étant rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques : 2cm pour une année sur l'axe des abscisses, 1cm pour 200 tonnes sur l'axe des ordonnées.

2. On considère qu'un ajustement exponentiel est adapté à l'analyse. Pour $1 \leqslant i \leqslant 7$, on pose alors $z_i = \ln y_i$.

   a. Recopier sur votre copie le tableau ci-dessous et le compléter avec les valeurs de z_i arrondies au centième :

Rang x_i de l'année $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$ $1 \leqslant i \leqslant 7$							

   b. À l'aide de la calculatrice, et en utilisant les données du tableau ci-dessus, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = ax + b$ (les coefficients seront arrondis au millième).

   c. En déduire une approximation de la quantité de déchets exportés y, exprimée en tonnes, en fonction du rang de l'année x sous la forme

   $$y = \alpha e^{\beta x}$$

   où le coefficient α est arrondi à l'unité et le coefficient β est arrondi au centième.

3. Selon cet ajustement, quelle quantité de déchets, arrondie à une centaine de tonnes, peut être exportée de la région A en vue d'une valorisation à l'horizon 2011 ?

Exercice 4 (7 *points*)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 10] par

$$f(x) = -0,25\,x^2 + 2\,x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ; 10] ; on note f' sa fonction dérivée sur cet intervalle.
   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 10],
   $$f'(x) = \frac{-0,5(x+2)(x-5)}{x+1}.$$
3.
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur [0 ; 10].
   b. Déterminer les variations de la fonction f sur [0 ; 10].
   c. Calculer la valeur exacte puis la valeur décimale arrondie au dixième du maximum de la fonction f sur [0 ; 10].
4.
   a. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle [5 ; 10] une solution unique x_0.
   b. Donner, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée par défaut à 10^{-1} de x_0.
5. On admet qu'une primitive de la fonction f sur [0 ; 10] est la fonction F définie par :
   $$F(x) = \frac{-1}{12}x^3 + x^2 - (4,75 + 3\ln 2)x + 3(x+1)\ln(x+1)$$
   Montrer que la valeur décimale arrondie au dixième de $\frac{1}{10}\int_0^{10} f(x)\,dx$ est 2,8.

Partie B

À l'approche des fêtes de fin d'année, un supermarché souhaite commercialiser des guirlandes de Noël.
On note x le nombre de guirlandes qu'il souhaite vendre (en milliers de guirlandes). On suppose que x est un réel compris entre 0 et 10.
Le bénéfice réalisé pour la vente de x milliers de guirlandes, exprimé en milliers d'euros, est donné par la fonction f définie sur [0 ; 10] par :

$$f(x) = -0,25\,x^2 + 2\,x + 3\ln(x+1) - 1,75 - 3\ln 2.$$

Déduire de la partie A les réponses aux questions suivantes (les réponses seront données à la centaine de guirlandes vendues près). On explicitera la méthode utilisée.

1. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice sur ce produit ?
2. Combien de guirlandes le supermarché doit-il vendre pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice maximal ? (à 100 euros près).
3. Quel bénéfice moyen peut espérer le supermarché en vendant entre 0 et 10000 guirlandes?