

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 heures — COEFFICIENT : 5

*Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Tournez la page S.V.P.**

### Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des huit questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

**Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez la réponse exacte sans justifier votre choix.**

*Barème : À chaque question est attribué un certain nombre de points.*

*Une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points attribué.*

*Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

*Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.*

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-2 ; 10]$  et la fonction composée  $g = \ln \circ f$ .

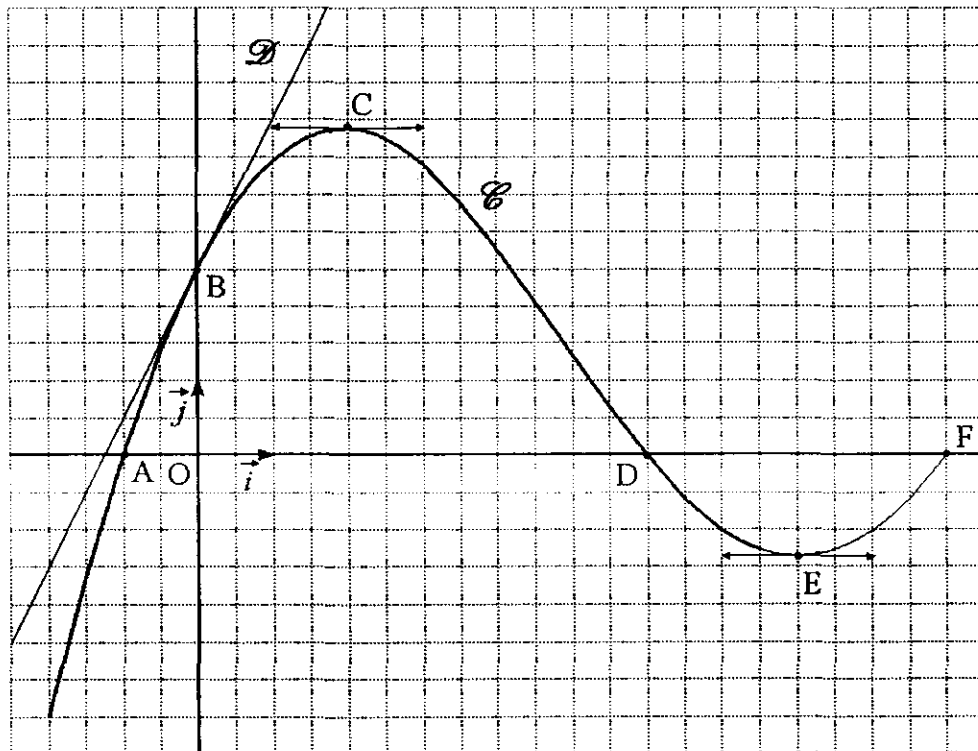
Sur la figure ci-dessous, le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

La courbe  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de  $f$ .

Les points  $A(-1 ; 0)$ ,  $B(0 ; 2,5)$ ,  $C(2 ; 4,38)$ ,  $D(6 ; 0)$ ,  $E(8 ; -1,35)$  et  $F(10 ; 0)$  sont des points de  $\mathcal{C}$ .

La droite  $\mathcal{D}$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  au point B.

Les tangentes à  $\mathcal{C}$  aux points C et E sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. Quelle est la valeur de  $f'(0)$ , nombre dérivé de  $f$  en 0 ?

a.  $f'(0) = 2,5$  ;

b.  $f'(0) = 2$  ;

c.  $f'(0) = 0,5$ .

2. Quel est l'ensemble  $S$  des solutions de l'équation  $f(x) = 0$  ?

- a.  $S = \emptyset$  ;                      b.  $S = \{-1 ; 6 ; 10\}$  ;                      c.  $S = \{2 ; 8\}$ .

3. A quel intervalle appartient le réel  $I = \int_{-1}^5 f(t) dt$  ?

- a.  $I \in [-1 ; 5]$  ;                      b.  $I \in [0 ; 4,38]$  ;                      c.  $I \in [15 ; 30]$ .

4. Quel est l'ensemble de définition de la fonction  $g$ , noté  $D_g$  ?

- a.  $D_g = ]-1 ; 6[$  ;                      b.  $D_g = ]0 ; 10[$  ;                      c.  $D_g = ]-2 ; 10[$ .

5. Quelle est la valeur de  $g(0)$  ?

- a.  $g(0) = 2,5$  ;                      b.  $g(0) = 0$  ;                      c.  $g(0) = \ln(2,5)$ .

6. Quelle est la valeur du coefficient directeur  $m$  de la tangente à la courbe représentative de  $g$  au point d'abscisse 0 ?

- a.  $m = 2$  ;                      b.  $m = \frac{1}{2}$  ;                      c.  $m = 0,8$ .

7. Quel est l'ensemble  $S'$  des solutions de l'équation  $g'(x) = 0$  ?

- a.  $S' = \emptyset$  ;                      b.  $S' = \{-1 ; 6 ; 10\}$  ;                      c.  $S' = \{2\}$ .

8. Quelle est la limite de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $-1$  ?

- a.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$  ;                      b.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$  ;                      c.  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$ .

### Exercice 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles : soit il diminue de 10%, soit il est stable, soit il augmente de 10%.

On note  $i_0 = 100$  l'indice de départ et  $i_n$  l'indice au bout de  $n$  jours.

1. a. Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final  $i_{10}$  ?

Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à  $i_0$  ?

- b. On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite  $(i_n)$  des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.

Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1000.

2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10% avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10% avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.

L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.

On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours.

On note  $X$  la valeur de l'indice  $i_2$  au bout de deux jours.

- a. Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.

- b. Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de  $X$  où les  $x_i$  sont les valeurs possibles de  $X$  et  $p_i$  la probabilité que  $X$  soit égale à  $x_i$ .

|       |    |     |      |      |     |     |
|-------|----|-----|------|------|-----|-----|
| $x_i$ | 81 | 90  |      | 100  | 110 | 121 |
| $p_i$ |    | 0,2 | 0,12 | 0,25 |     |     |

- c. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

**Exercice 3 (5 points)**

**Commun à tous les candidats**

La société INFOLOG a mis au point un nouveau logiciel de gestion destiné aux PME. Cette société a mené une enquête dans une région auprès de 300 entreprises équipées d'ordinateurs aptes à recevoir ce logiciel, ceci afin de déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir un exemplaire de ce nouveau logiciel. Elle a obtenu les résultats suivants :

| $x_i$ prix proposé pour le nouveau logiciel en <i>centaines</i> d'euros | $y_i$ nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix |
|---|--|
| 30  | 90   |
| 25  | 120  |
| 20  | 170  |
| 15  | 200  |
| 10  | 260  |

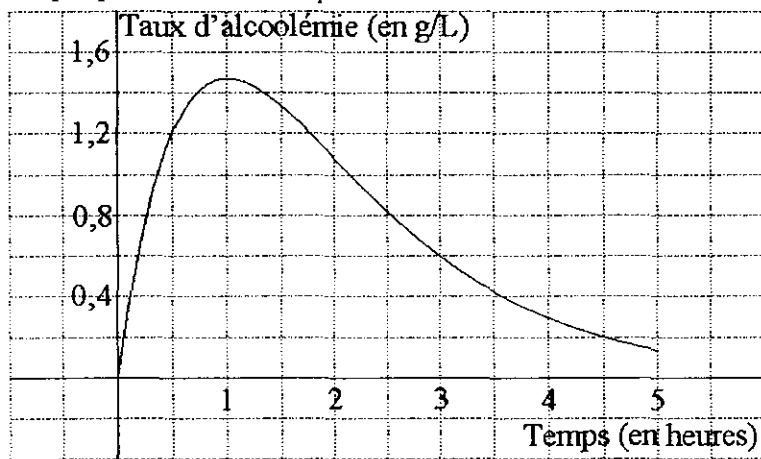
1. Représenter graphiquement le nuage de points de la série  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour 200 euros en abscisses et 5 cm pour 100 entreprises en ordonnées). Placer le point moyen  $G$  après avoir déterminé ses coordonnées.
2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite  $D$  d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  sous la forme  $y = ax + b$ .  
*Aucun détail des calculs n'est demandé, les résultats ne seront pas arrondis.*  
Tracer  $D$  sur le graphique précédent.
3. En utilisant l'ajustement précédent, préciser pour quel prix de vente la société INFOLOG peut espérer que les 300 entreprises contactées acceptent d'acquérir ce logiciel
4. On note  $R(x)$  la recette, exprimée en centaines d'euros, dégagée par la vente de  $y$  logiciels au prix de  $x$  centaines d'euros.
  - a. En utilisant la relation entre  $y$  et  $x$  obtenue à la question 2, donner l'expression de  $R(x)$  pour  $x$  variant entre 5 et 30.
  - b. Étudier les variations de la fonction  $R$  sur  $[5 ; 30]$  et en déduire le prix de vente du logiciel, exprimé en euros, pour que la recette  $R(x)$  soit maximale. Déterminer alors le montant de cette recette ainsi que le nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.

### Exercice 4 (5 points)

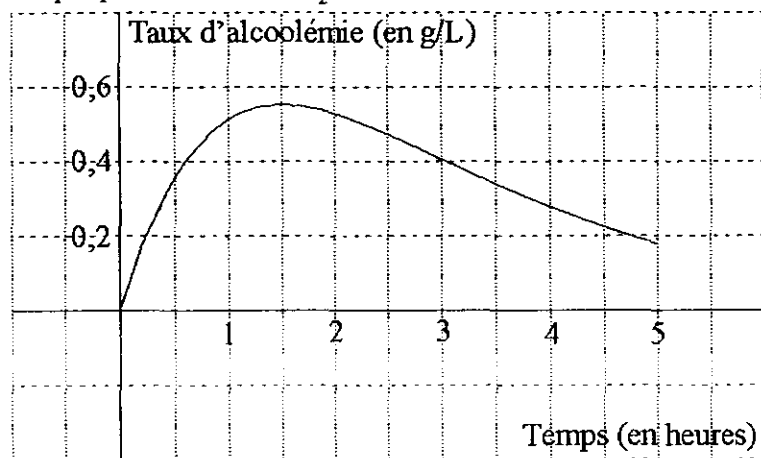
Commun à tous les candidats

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'une certaine personne (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool. On donne ci-dessous, la courbe  $C_1$  représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun (graphique n°1) et la courbe  $C_2$  représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments (graphique n°2).

Graphique n°1 : courbe  $C_1$



Graphique n°2 : courbe  $C_2$



#### Partie A : Observation graphique

À l'aide des deux graphiques précédents, répondre aux questions suivantes :

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et du temps au bout duquel il est atteint.
2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux maximum d'alcoolémie autorisé au volant est 0,5 g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer si la personne aura respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

**Partie B : Modélisation**

On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en g/L) pendant les cinq heures suivant l'absorption est modélisé en fonction du temps (exprimé en heures) :

- par une fonction  $f_1$  lorsque l'alcool est absorbé à jeun,
- par une fonction  $f_2$  lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments.

On admet que :

- les courbes  $C_1$  et  $C_2$  de la première partie sont les représentations graphiques respectives des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  ;
- la fonction  $f_1$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  par  $f_1(t) = 4 t e^{-t}$ .
- la fonction  $f_2$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  par  $f_2(t) = a t e^{bt}$  où  $a$  et  $b$  désignent des nombres réels non nuls.

1. On désigne par  $f_2'$  la fonction dérivée de  $f_2$  sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  .

Déterminer  $f_2'(t)$ .

On admet que  $f_2'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$  . En déduire le réel  $b$ .

2. En utilisant le taux d'alcoolémie au bout de trois heures, déterminer une valeur approchée de  $a$  et en donner la valeur décimale arrondie à 0,1.

3. Résoudre l'équation  $f_1(t) = t e^{-\frac{2}{3}t}$  . Interpréter le résultat.