BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

obligatoire

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT : 5

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 *(6 points)*

Commun à tous les candidats

Une buvette, située en bordure de plage, est ouverte de 12 heures à 18 heures. Elle propose des crêpes salées et des crêpes sucrées.
Chaque client achète une seule crêpe.

60 % des clients se présentent à l'heure du déjeuner (entre 12 heures et 14 heures).

Parmi les clients achetant une crêpe l'après-midi (à partir de 14 heures), 80 % choisissent une crêpe sucrée.

On appelle :
D l'événement : « le client est venu à l'heure du déjeuner ».
A l'événement : « le client achète une crêpe salée ».

On sait que la probabilité qu'un client achète une crêpe salée est égale à 0,62.

On pourra représenter les différentes situations par des arbres pondérés.
Les résultats seront donnés sous forme décimale.

1. Déterminer les probabilités des événements D et $\overline{D}$.

2. a) Un client est venu l'après-midi. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une crêpe salée ?
   b) Calculer $P\left(A \cap \overline{D}\right)$.
   c) En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(A \cap D)$.
   d) Un client vient à l'heure du déjeuner ; montrer que la probabilité qu'il achète une crêpe salée est égale à 0,9.

3. Un client a acheté une crêpe salée ; quelle est la probabilité, à 0,01 près, qu'il soit venu l'après-midi ?

4. On vend 3 euros une crêpe salée et 2 euros une crêpe sucrée. La buvette reçoit 250 clients par jour. Quelle est l'espérance de la recette quotidienne due à la vente de crêpes ?

Exercice 2 *(5 points)*

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions ci-dessous, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

1. La fonction $x \mapsto \mathrm{e} + \frac{1}{5}$ est la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}x + \ln 5$.

2. L'ensemble des solutions sur **R** de l'équation $(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 4) = 0$ est : $S = \{0\}$.

3. Si $\left(1 - \frac{1}{100}\right)^n \leq 0{,}7$ alors $n \geq \frac{\ln 0{,}7}{\ln 0{,}99}$.

4. L'ensemble des solutions sur **R** de l'équation $\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(5x + 9)$ est : $S = \{-2 \,;\, 3\}$.

5. La limite quand x tend vers 1, $x < 1$, de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right)$ est 0.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 *(9 points)*

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ où a et b sont deux réels.

On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;+\infty[$ et on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. On sait que $(\mathcal{C})$ passe par le point E $(0\,;1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale. En déduire $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Vérifier que $f'(x)=(-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b.

PARTIE B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. a) Vérifier que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c) En déduire que $(\mathcal{C})$ possède une asymptote dont on précisera une équation.
2. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation complet de f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0{,}5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;4]$.
   b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=-(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que g est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.
5. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;4]$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième du résultat.

(Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$)

PARTIE C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jour, q étant un réel de $[0\,;4]$.

Le prix de revient d'une pièce, exprimé en euros, dépend de q et est donné par l'expression :

$$f(q)=(q+1)\mathrm{e}^{-q}.$$

1. Combien coûte, en moyenne, à l'euro près, la production de 4000 pièces ?
2. À partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0,5 euro ?