

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2005

MATHÉMATIQUES

Série : ES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT : 5

*Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5  
et une annexe à rendre avec la copie.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Tournez la page S.V.P.**

### Exercice 1 (6 points)

#### Commun à tous les candidats

Une résidence de vacances propose deux types d'appartements (studio et deux-pièces) à louer à la semaine. L'appartement doit être restitué parfaitement propre en fin de séjour.

Le locataire peut décider de le nettoyer lui-même ou peut choisir l'une des deux formules d'entretien suivantes : la formule Simple (nettoyage de l'appartement en fin de séjour par le personnel d'entretien) ou la formule Confort (nettoyage quotidien du logement durant la semaine et nettoyage complet en fin de séjour par le personnel d'entretien).

Le gestionnaire a constaté que :

- 60 % des locataires optent pour un studio et parmi ceux-ci 20 % ne souscrivent aucune formule d'entretien ;
- La formule Simple a beaucoup de succès : elle est choisie par 45 % des locataires de studio et par 55 % des locataires de deux-pièces ;
- 18 % des locataires ne souscrivent aucune formule.

On rencontre un résident au hasard.

Soit  $S$  l'événement « Le résident a loué un studio »

$A$  l'événement « Le résident a souscrit la formule Simple »

$B$  l'événement « Le résident a souscrit la formule Confort »

$R$  l'événement « Le résident n'a souscrit aucune formule d'entretien »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité que le résident ait loué un deux-pièces ?  
b. Calculer  $P_S(B)$  ?
3. a. Calculer  $P(R \cap S)$  ; en déduire  $P(R \cap \bar{S})$ .  
b. Le résident a loué un deux-pièces. Montrer que la probabilité qu'il assure lui-même le nettoyage de son appartement est 0,15.
4. Le gestionnaire affirme que près de la moitié des résidents choisit la formule Simple. Présenter les calculs qui justifient son affirmation.
5. La location d'un studio à la semaine coûte 350 euros, celle d'un deux-pièces 480 euros. La formule Simple coûte 20 euros et la formule Confort 40 euros. Soit  $L$  le coût de la semaine (loyer et entretien) ; il prend différentes valeurs  $L_i$ . On désigne par  $p_i$  la probabilité que le coût de la semaine soit égal à  $L_i$ .  
a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

$L_i$	350	370	390	480	500	520
$p_i$	0,12		0,21			0,12

- b. Calculer l'espérance de  $L$ . En donner une interprétation.

### Exercice 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et recopiez l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

Barème : À chaque question est attribué 1 point.

Une réponse inexacte enlève 0,5 point.

Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]4 ; +\infty[$  par  $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$  et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Une autre expression de  $f(x)$  est

- $f(x) = -2x + 1 - \frac{2}{x-1}$
- $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4-x}$
- $f(x) = \frac{2x^2 + 9x - 2}{x-4}$

2. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]4 ; +\infty[$ . Une expression de  $f'(x)$  est

- $f'(x) = -2 - \frac{8}{(x-4)^2}$
- $f'(x) = \frac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$
- $f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$

3. La courbe  $\Gamma$  admet pour asymptote

- la droite d'équation  $y = 4$ .
- la droite d'équation  $x = 4$ .
- la droite d'équation  $y = 4x$ .

4. La droite d'équation  $y = -2x + 1$  est

- asymptote à la courbe  $\Gamma$ .
- située en dessous de la courbe  $\Gamma$ .
- tangente à la courbe  $\Gamma$ .

5. La fonction  $x \mapsto F(x)$  donnée par

- $F(x) = -x^2 + x + 8(x-4)^2$
- $F(x) = -x^2 + x + 8 \ln(x-4)$
- $F(x) = -x^2 + x - 8 \ln(x-4)$

est une primitive de  $f$  sur  $]4 ; +\infty[$ .

**Exercice 3 (4 points)**

**Commun à tous les candidats**

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right) = 0$ .

**Partie A : Étude d'une fonction**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$ .

1. Calculer  $f'(x)$  et montrer que l'on a :  $f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$ .
2. En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$  (les limites aux bornes ne sont pas demandées).
3. Justifier alors que, pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ , on a :  $\ln x < \sqrt{x}$ .

**Partie B : Utilisation des théorèmes de comparaisons**

1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  strictement supérieur à 1, on a :  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ . En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)$ .

On rappelle que la dérivée de la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est  $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

**BACCALAURÉAT GÉNÉRAL**

SESSION 2005

---

**MATHÉMATIQUES  
OBLIGATOIRE**

Série : ES

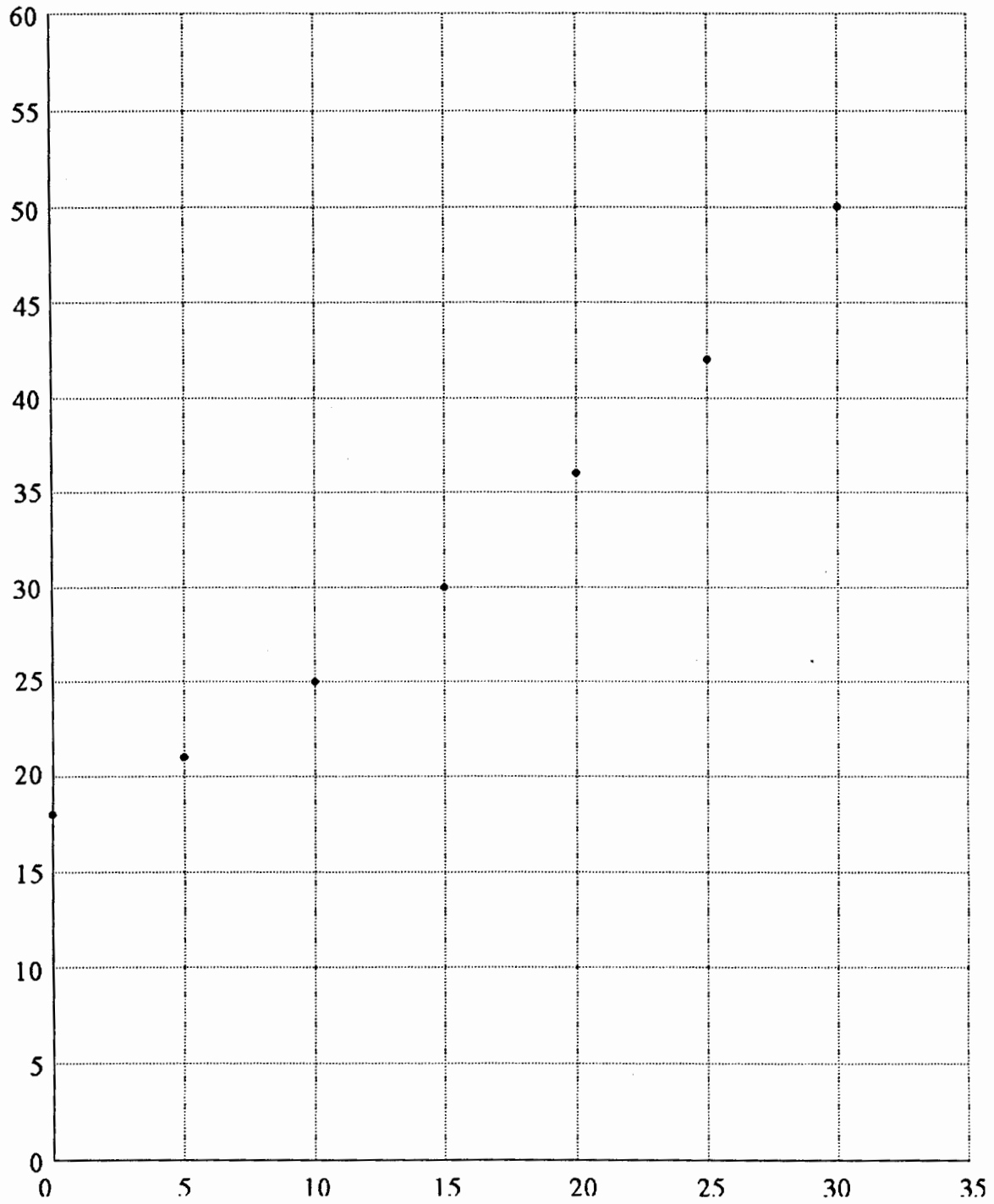
---

***ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE.***

**Tournez la page S.V.P.**

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4



### Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année $x$	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants $y$	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement sur l'annexe jointe ; le rang  $x$  de l'année est en abscisse et la population  $y$  en ordonnée.

Cette annexe sera complétée au fur et à mesure des questions et rendue avec la copie.

#### Partie A : Un ajustement affine

- À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).  
Tracer cette droite sur le graphique donné en annexe.
- Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

#### Partie B : Un ajustement exponentiel

- L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = a e^{bx}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels.  
Déterminer  $a$  et  $b$  tels que  $f(0) = 18$  et  $f(30) = 50$ . On donnera une valeur arrondie de  $b$  au millième.
- Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.
- Tracer la courbe représentative de  $f$  sur le graphique donné en annexe.
- La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

#### Partie C : Calcul d'une valeur moyenne

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang  $x$  par

$$f(x) = 18e^{0,034x}.$$

- Calculer la valeur moyenne de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 30]$  ; on donnera le résultat arrondi au dixième.
- À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne ?