

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Cette première partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes trois réponses sont proposées, une seule de ces réponses convient.

Sur votre copie, noter le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une seule réponse est acceptée.

Barème : Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cette partie sera ramenée à zéro.

Rappel de notations : $p(A)$ désigne la probabilité de A , $p_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B , $p(A \cup B)$ signifie la probabilité de « A ou B » et $p(A \cap B)$ signifie la probabilité de « A et B ».

1. On lance un dé cubique équilibré. Les faces sont numérotées de 1 à 6.

La probabilité d'obtenir une face numérotée par un multiple de 3 est

- $\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2}$

2. Soient A et B deux événements tels que $p(A) = 0,2$, $p(B) = 0,3$ et $p(A \cap B) = 0,1$; alors

- $p(A \cup B) = 0,4$
- $p(A \cup B) = 0,5$
- $p(A \cup B) = 0,6$

3. Soient A et B deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors on a obligatoirement :

- $p(A \cap B) = 0$
- $p_A(B) = p_B(A)$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

4. Une expérience aléatoire a trois issues possibles : 2 ; 3 et a (où a est un réel).

On sait que $p(2) = \frac{1}{2}$, $p(3) = \frac{1}{3}$ et $p(a) = \frac{1}{6}$.

On sait de plus que l'espérance mathématique associée est nulle. On a alors

- $a = -12$
- $a = 6$
- $a = -5$

Partie B

Dans cette partie toutes les réponses seront justifiées.

Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

1. Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.

- a. Montrer que la probabilité que Julien ne marque aucun panier est égale à 0,0256.
- b. Calculer la probabilité que Julien marque au moins un panier.

2. Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ?

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 2 (5 points)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

Sachant qu'il y avait 13 millions de cotisants au régime général de retraites en France métropolitaine en 1975 et 16,6 millions de cotisants en 2005, calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de cotisants entre 1975 et 2005. On arrondira le résultat à 0,1 % près.

Partie 2

Le tableau ci-dessous donne le nombre de retraités en France métropolitaine entre 1975 et 2005 :

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année x_i $0 \leq i \leq 6$	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de retraités (en millions) y_i $0 \leq i \leq 6$	4,1	5,0	5,9	7,4	8,3	9,7	10,7

Source : INSEE / Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse 2007

- Sur une feuille de papier millimétré, représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$, $0 \leq i \leq 6$, associé à la série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2cm en abscisse (pour les rangs d'année) et 1cm en ordonnée (pour 1 million de retraités).
- Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique.
 - Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite d d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients au dixième).
 - Placer le point G et tracer la droite d dans le repère construit à la première question.
- En utilisant l'ajustement trouvé à la question 2, déterminer par un calcul une estimation du nombre de retraités en 2010.

Partie 3

On utilisera les données des parties 1 et 2. Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme de pourcentage, arrondis au dixième.

On appelle rapport démographique de l'année n le rapport

$$R_n = \frac{\text{nombre de cotisants de l'année } n}{\text{nombre de retraités de l'année } n}.$$

- Calculer le taux d'évolution de R_n entre 1975 et 2005.
- Entre 2005 et 2010, une étude montre que le nombre de cotisants devrait augmenter de 6,4% et que le nombre de retraités devrait augmenter de 12,1%. Calculer le taux d'évolution du rapport démographique entre 2005 et 2010.

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice 3 (10 points)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

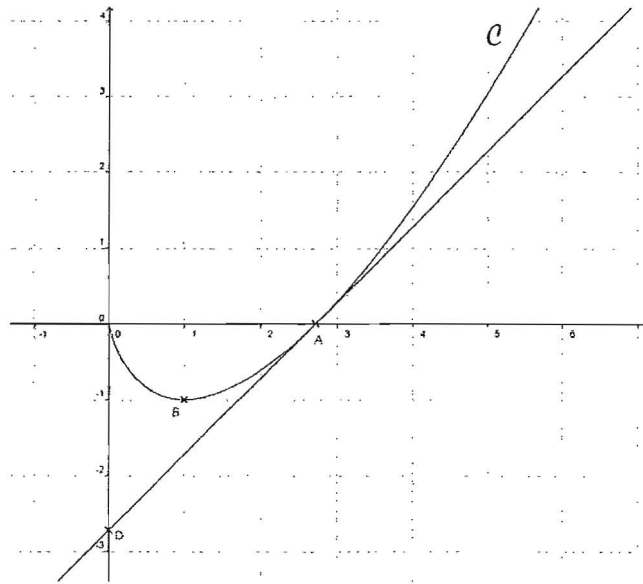
Partie A. Lectures graphiques

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f .

La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points $A(e ; 0)$ et $B(1 ; -1)$.

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point $D(0 ; -e)$.



1. Déterminer une équation de la droite (AD).

Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question 2.

2. Par lectures graphiques :

- a. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
- b. Dresser le tableau de signes de f sur $]0 ; 5]$.
- c. Dresser le tableau de signes de f' sur $]0 ; 5]$.
- d. Soit F une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer les variations de F sur $]0 ; 5]$.
- e. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = 4$ et $x = 5$.

Partie B. Étude de la fonction

La courbe $\mathcal{C}$ de la partie A est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty [$ par $f(x) = x (\ln x - 1)$.

1.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty [$ par $h(x) = x \ln x$. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. Déterminer la limite de f en 0.
2.
 - a. Montrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty [$, on a : $f'(x) = \ln x$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0 ; +\infty [$ et en déduire le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty [$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction H définie sur $]0 ; +\infty [$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$ est une primitive sur $]0 ; +\infty [$ de la fonction h définie à la question 1.b).
 - b. En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^e f(x) dx$.
 - c. En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. On arrondira le résultat au dixième.