BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures.** – COEFFICIENT : **5**

Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10
dont 2 pages en annexe à remettre avec la copie.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

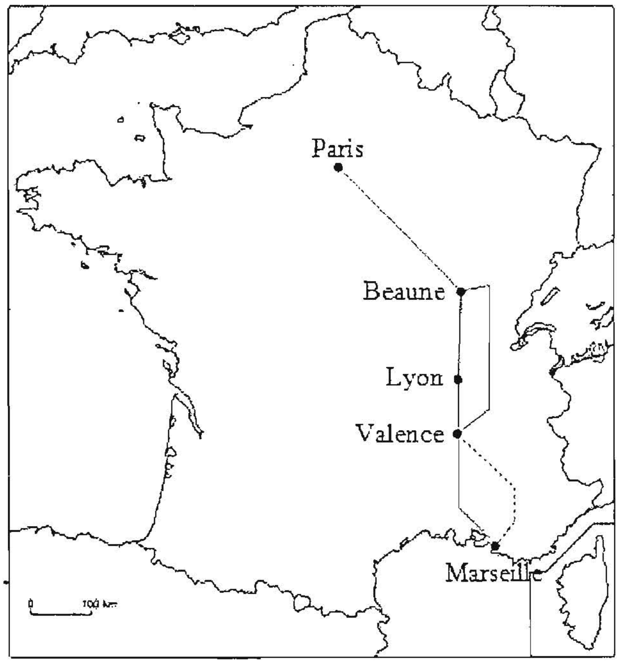
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(5 points)*

Commun à tous les candidats

Exercice 1 (5 points)

Lors des journées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Marseille est surchargée.
Il est donc conseillé de prendre un itinéraire de délestage entre Beaune et Valence (qui ne passe pas par Lyon) afin d'éviter les éventuels « bouchons » autoroutiers.
Entre Valence et Marseille il est également conseillé de prendre la route départementale représentée par des pointillés sur la carte.
Bison Futé a publié les résultats d'une étude portant sur les habitudes des automobilistes sur le trajet entre Paris et Marseille lors de ces journées « rouges ».



Il s'avère que :

- 40 % des automobilistes prennent l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence ;
- parmi les automobilistes ayant suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 30 % prennent la route départementale de Valence à Marseille ;
- parmi les automobilistes n'ayant pas suivi l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence, 60 % prennent la route départementale de Valence à Marseille.

On note :
B l'événement « l'automobiliste prend l'itinéraire de délestage entre Beaune et Valence » et $\overline{B}$ l'événement contraire ;
V l'événement « l'automobiliste prend la route départementale entre Valence et Marseille » et $\overline{V}$ l'événement contraire.

1.

   a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

   b. Montrer que la probabilité de l'événement $\overline{B} \cap \overline{V}$ est $p\left(\overline{B} \cap \overline{V}\right) = 0{,}24$ et interpréter ce résultat.

   c. Calculer la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Valence et Marseille.

2. On donne les temps de parcours suivants :

Paris – Beaune (par autoroute) : 4 heures ;
Beaune – Valence (par autoroute, en passant par Lyon) : 5 heures ;
Beaune – Valence (par itinéraire de délestage, en ne passant pas par Lyon) : 4 heures ;
Valence – Marseille (par autoroute) : 5 heures ;
Valence – Marseille (par la route départementale) : 3 heures.

   a. Calculer les temps de parcours entre Paris et Marseille, selon l'itinéraire choisi. Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la durée du trajet pour se rendre de Paris à Marseille selon l'itinéraire choisi.

Temps en heures	11			14
Probabilité				0,24

   b. Calculer l'espérance de cette loi en heures et en donner une interprétation (la conversion en heure minute seconde n'est pas attendue).

Exercice 2 (*5 points*)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Les parties *A* et *B* sont indépendantes.

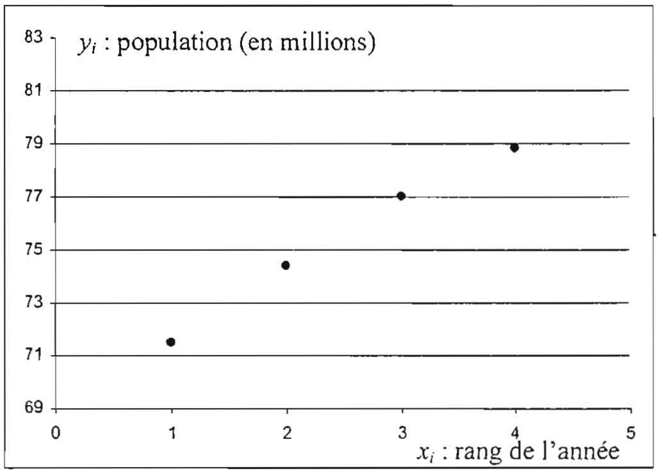
Partie *A*

Le tableau ci-dessous donne l'évolution, par période de cinq ans, de la population globale des deux Allemagnes (R.F.A. et R.D.A.) de 1958 à 1973.

Année	1958	1963	1968	1973
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 4$	1	2	3	4
Population des deux Allemagnes y_i en millions d'habitants $1 \leqslant i \leqslant 4$	71,5	74,4	77	78,8

Source : INSEE

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.

1. Déterminer, en utilisant une calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).

2. En 1993, la population globale de l'Allemagne réunifiée s'élevait à 81 millions d'habitants.
   L'ajustement proposé est-il adapté ?

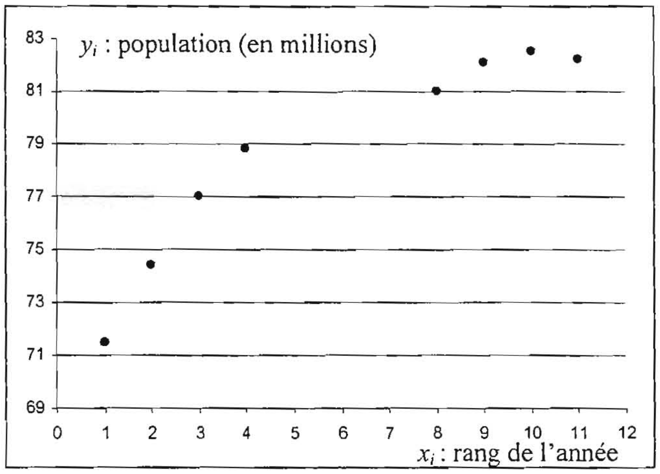
Partie B

On étudie ci-dessous l'évolution de la population de l'Allemagne sur une période plus étendue (à partir de 1990, il s'agit de la population de l'Allemagne réunifiée).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
Population de l'Allemagne y_i en millions d'habitants $1 \leqslant i \leqslant 11$	71,5	74,4	77	78,8	81	82,1	82,5	82,2

Source : INSEE

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



Au vu de l'allure du nuage, un ajustement logarithmique semble plus approprié.

Pour cela on pose $z_i = \mathrm{e}^{\frac{y_i}{100}}$, pour $1 \leqslant i \leqslant 11$.

1. Recopier sur la copie et compléter la dernière ligne du tableau ci-dessous (les résultats seront arrondis au centième).

Année	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Rang de l'année x_i $1 \leqslant i \leqslant 11$	1	2	3	4	8	9	10	11
$z_i = e^{\frac{y_i}{100}}$ (arrondi au centième) $1 \leqslant i \leqslant 11$								

2. En déduire, en utilisant la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, les coefficients a et b seront arrondis au centième.

3. En déduire que l'ajustement logarithmique recherché est donné par l'équation $y = 100\ln(0,02x + 2,07)$.

4. À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation de la population de l'Allemagne en 2013.

Exercice 3 (*5 points*)

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par

$$A(x)=\frac{4}{1-\mathrm{e}^{-0,039x}}.$$

1. Calculer la limite de $A(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction A est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et on note A' sa fonction dérivée sur cet intervalle. Montrer que, pour tout x appartenant à $[1\,;+\infty[$ on a
$$A'(x)=\frac{-0,156\mathrm{e}^{-0,039x}}{(1-\mathrm{e}^{-0,039x})^2}.$$
3. Justifier que $A'(x)<0$ pour tout x appartenant à $[1\,;+\infty[$.
Dresser le tableau de variation de A sur $[1\,;+\infty[$.

Partie B

Un particulier souhaite réaliser auprès d'une banque un emprunt d'un montant de 100 000 € à un taux annuel fixé.

On admet que, si l'on réalise cet emprunt sur une durée de n années ($n \geqslant 1$), le montant d'une annuité (somme à rembourser chaque année, pendant n ans) est donné en milliers d'euros par

$$A(n)=\frac{4}{1-\mathrm{e}^{-0,039n}}.$$

Pour un emprunt fait sur n années ($n \geqslant 1$), on note :

$S(n)$ le montant total payé à la banque au bout des n années (en milliers d'euros) ;
$I(n)$ le total des intérêts payés à la banque au bout des n années (en milliers d'euros).

Dans les questions qui suivent, on donnera les résultats arrondis au millième.

1. Calculer $A(1)$, $A(10)$ et $A(20)$ et interpréter ces résultats.
2. Démontrer que $I(n)=\dfrac{4n}{1-\mathrm{e}^{-0,039n}}-100$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant sur votre feuille.

Durée de l'emprunt n	10 ans	15 ans	20 ans
Montant d'une annuité $A(n)$			
Montant $S(n)$ des n annuités payées à la banque			
Intérêts $I(n)$ versés à la banque			

4. Pour faciliter l'étude des valeurs de $A(n)$, $S(n)$ et $I(n)$, on utilise les fonctions A, S et I définies sur [1 ; 20] par :

$$A(x)=\frac{4}{1-\mathrm{e}^{-0,039x}} \quad ; \quad S(x)=\frac{4x}{1-\mathrm{e}^{-0,039x}} \quad ; \quad I(x)=\frac{4x}{1-\mathrm{e}^{-0,039x}}-100.$$

On a représenté respectivement en ANNEXE 1 ci-après les fonctions A et S par les courbes $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_S$ sur l'intervalle [1 ; 20].

a. Expliquer comment utiliser le graphique de l'ANNEXE 1 pour retrouver $I(10)$.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Expliquer comment déterminer graphiquement sur l'ANNEXE 1 le sens de variation du montant total des intérêts à payer en fonction de la durée du remboursement de l'emprunt.

Exercice 4 (5 *points*)

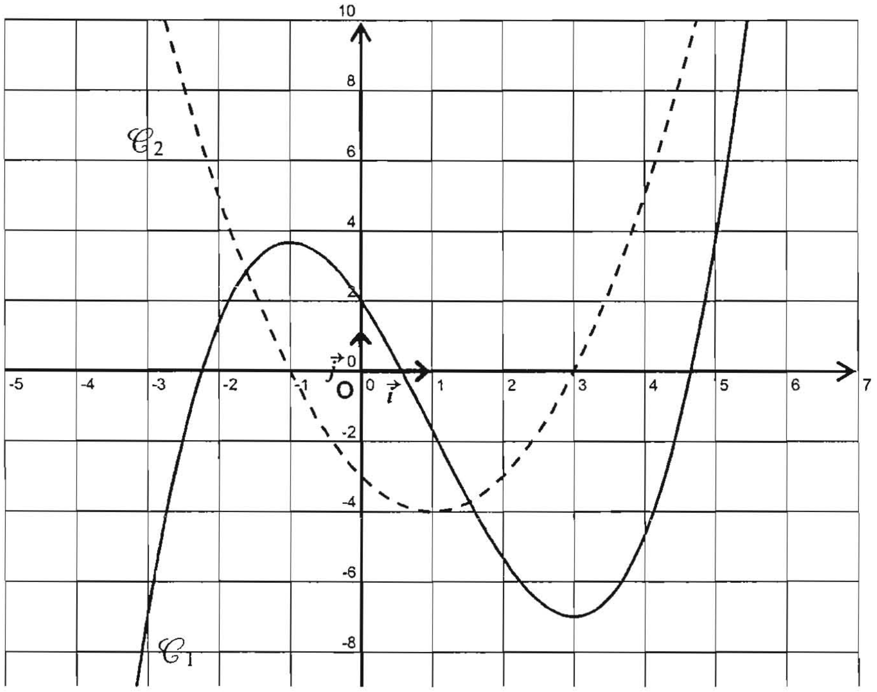
Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A : Étude graphique

Les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée f' sont données ci-dessous.

Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ à la fonction qu'elle représente. Justifier votre réponse.



PARTIE B : Constructions

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. Chacun des tracés sera brièvement expliqué.

a. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction g vérifiant les conditions suivantes :
g est dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ et l'équation $g'(x) = 0$ admet trois solutions sur $[-3 ; 3]$.

b. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction h définie et continue sur $[-3 ; 3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

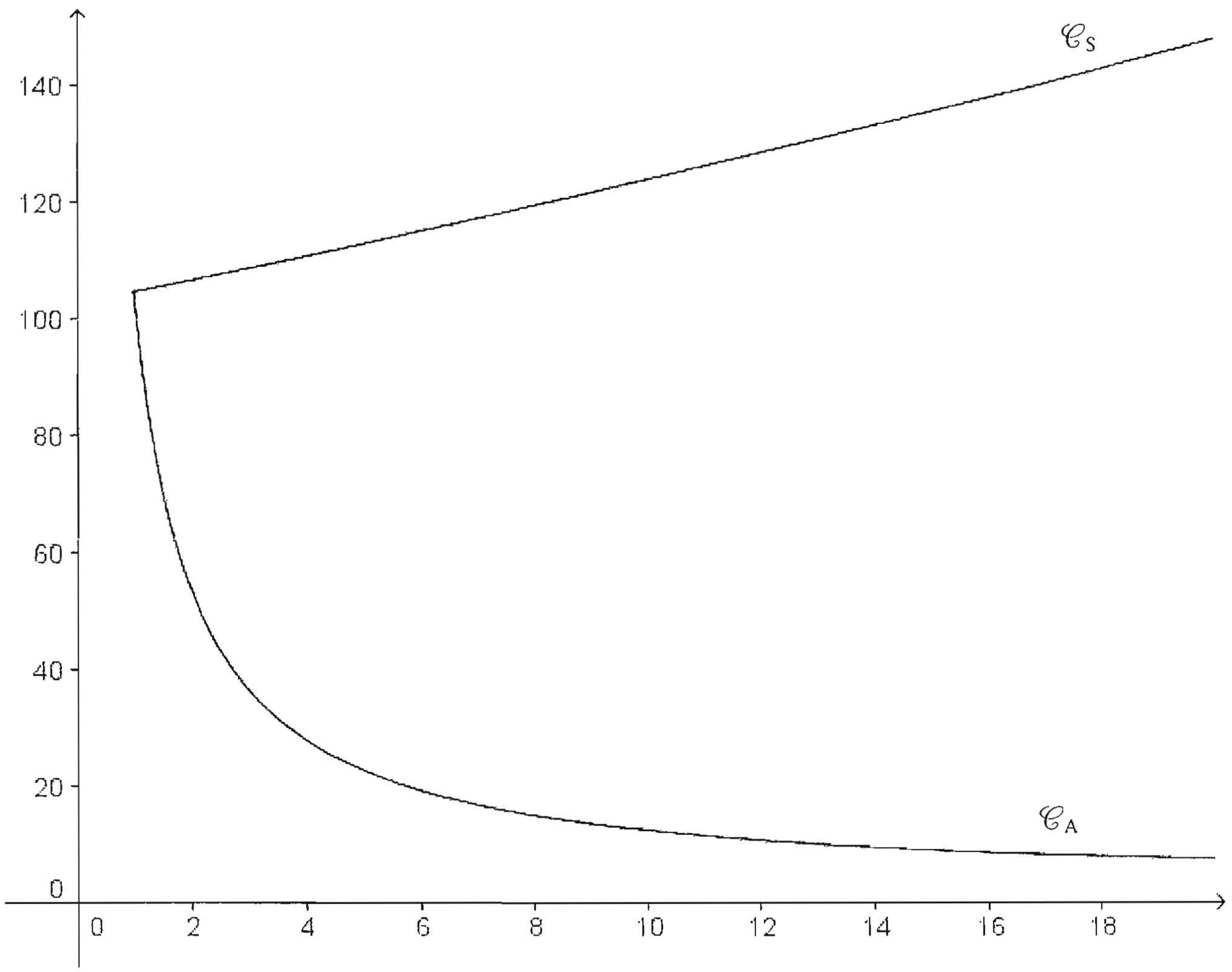
x	-3		0		2		3
$\ln(h(x))$		↗		↘		↗	

c. Sur l'ANNEXE 2, construire une courbe pouvant représenter une fonction k définie et continue sur $[-3 ; 3]$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$4 \leqslant \int_1^3 k(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 6.$$

ANNEXE 1 : exercice 3

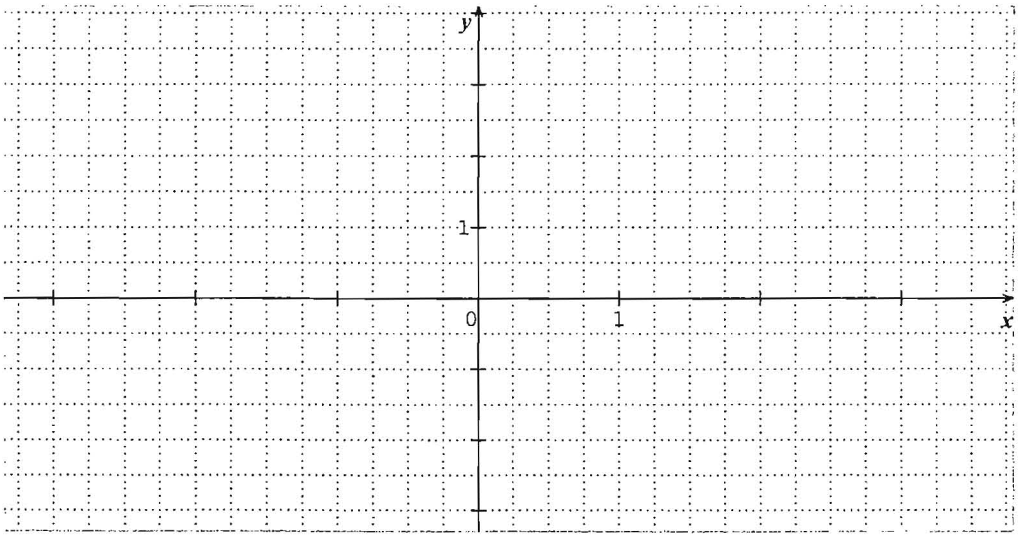
À rendre avec la copie



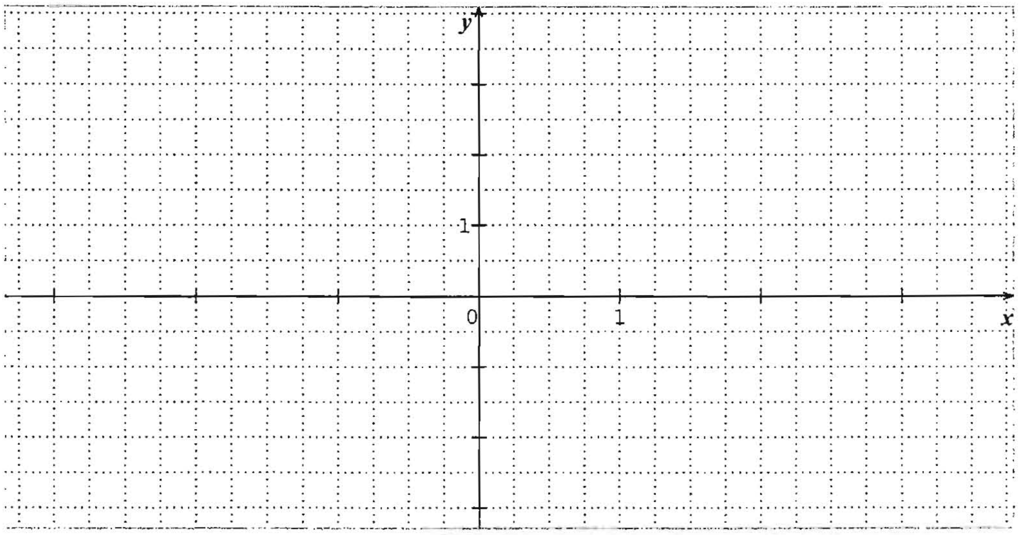
ANNEXE 2 : exercice 4

À rendre avec la copie

Partie B a.



Partie B b.



Partie B c.