BACCALAUREAT GENERAL

session 2004

MATHÉMATIQUES

Série S

Spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures – COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (5 points)

1. La fonction f représentée (graphique 1) par la courbe (C) est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(ax+b)\ln x$ où a et b sont deux constantes que l'on calculera dans la suite de cette question.

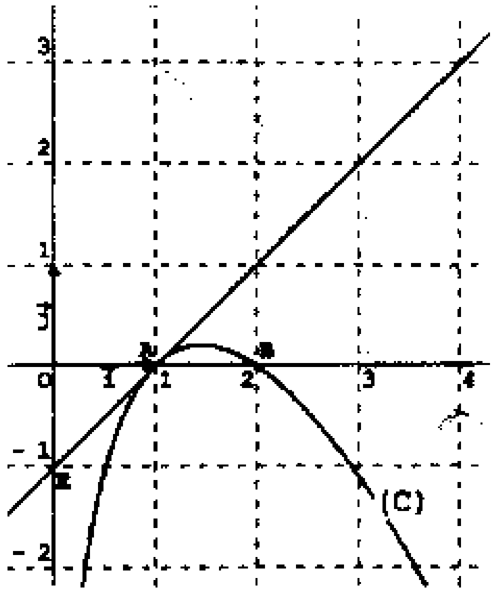
Sur le graphique 1 sont placés les points A(1 ; 0) , B(2 ; 0) et E(0 ; -1).

Les points A et B appartiennent à la courbe (C), la droite (AE) est tangente à la courbe (C) en A .

a) Donner par lecture graphique $f(2)$ et $f'(1)$.

b) En déduire que a et b sont solutions du système $\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$.

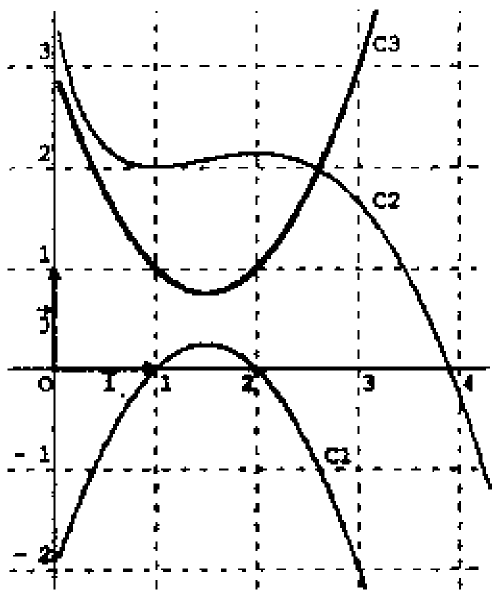
c) Déterminer a et b.



graphique 1

2. Soit G une primitive de la fonction f représentée par la courbe (C) du graphique 1.

Parmi les trois courbes C1, C2, C3 proposées sur le graphique 2, quelle est la seule qui peut représenter G dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$? Justifier votre réponse.



graphique 2

3. On admet à partir de maintenant que f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2\ln x - x\ln x$.

Le but de la question est de calculer une intégrale.

Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x)=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\ln x - 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}$.

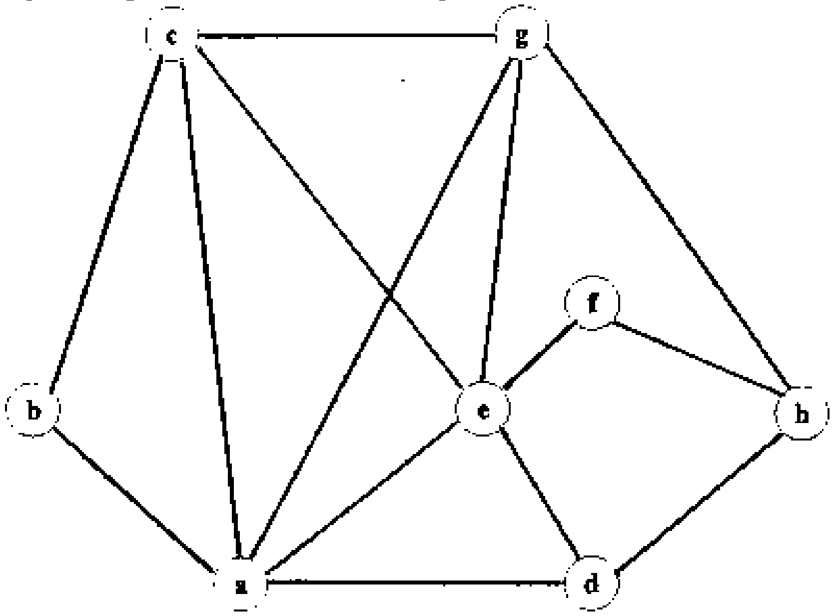
a) Démontrer que la fonction F est la primitive de f qui prend la valeur 2 pour $x = 1$.

b) Calculer $\int_1^2 f(x)dx$. Donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Exercice 2 (pour les candidats ayant fait la spécialité) (5 points)

Partie A .

On note G le graphe représenté ci-dessous et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée.



$$M^3 = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.

b) Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.

c) Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.

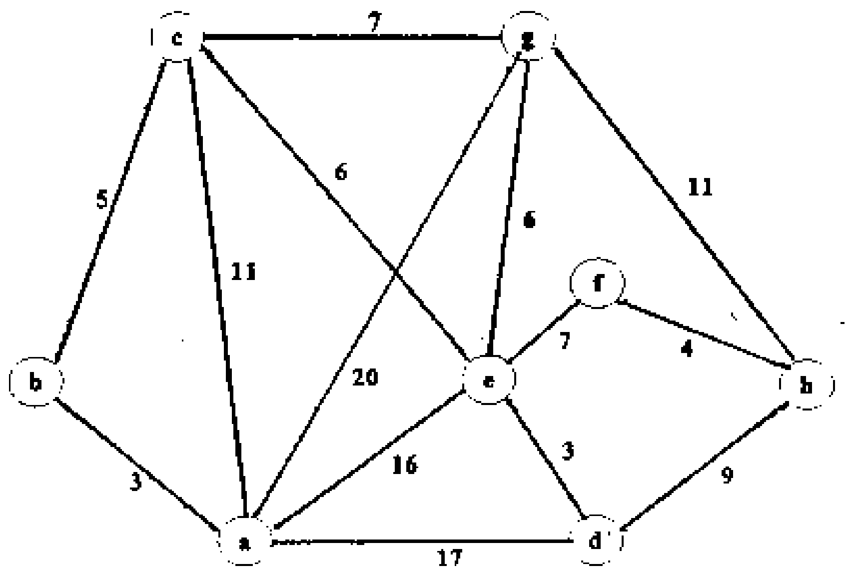
d) Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.

e) Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.

f) Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet **e** à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B.

Le graphe précédent représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises).



Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt **a** à l'arrêt **h** et donner ce trajet.

Exercice 3 (4 points)

Le tableau suivant donne en France le nombre de centenaires au 1er janvier des années indiquées.

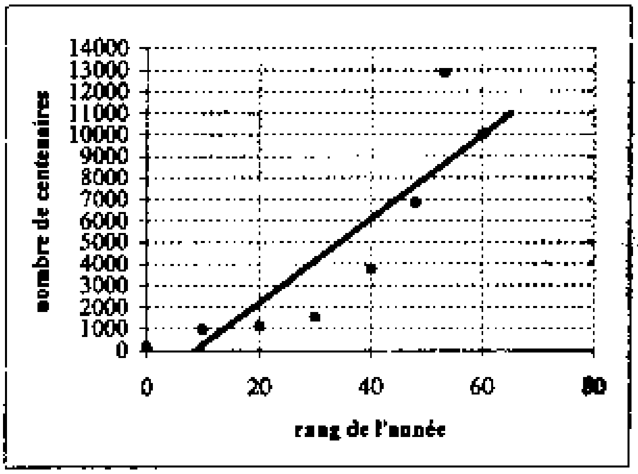
Année	1950	1960	1970	1980	1990	1998	2003
Rang x_i de l'année	0	10	20	30	40	48	53
Nombre y_i de centenaires	200	977	1122	1545	3760	6840	12871

Source : INSEE

1. a) Quel est le pourcentage d'augmentation du nombre de centenaires entre le premier janvier 1950 et le premier janvier 1980 ?

b) Peut-on affirmer que le nombre de centenaires a augmenté en moyenne de près de 10 % par an entre le premier janvier 1990 et le premier janvier 2003 ?

2. Le nuage de points de la série statistique (x_i , y_i) est représenté ci-dessous, ainsi que la droite D d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.



En utilisant le graphique préciser le nombre de centenaires que l'on peut, avec cet ajustement, prévoir au premier janvier 2010. Ce nombre semble-t-il réaliste par rapport aux valeurs observées ?

3. L'allure du nuage de points invite à chercher un ajustement exponentiel. A cette fin, on pose $z_i = \ln(y_i)$.

a) Recopier et compléter le tableau où les nombres z_i seront arrondis à 10^{-4} près.

Rang x_i de l'année	0	10	20	30	40	48	53
$z_i = \ln(y_i)$							

b) En utilisant la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x (*les coefficients seront arrondis à 10^{-4} près*).

c) En déduire une estimation du nombre de centenaires que l'on peut, avec cet ajustement exponentiel, prévoir au premier janvier 2010.

Exercice 4 (6 points)

Une entreprise décide, pour la promotion de nouveaux produits, de mener une campagne publicitaire. Elle envisage la distribution d'un dépliant aux consommateurs .
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre d'envois permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal.

1.Soit la fonction R définie sur $[0\,;+\infty[$ par $R(x)=xe^{-0,1x+0,1}$.

a) Justifier que $R'(x)=(1-0,1x)e^{-0,1x+0,1}$, où R' désigne la fonction dérivée de R.

b) Etudier les variations de R, puis dresser son tableau de variation. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} R(x)=0$.

2. Une étude préalable a montré que le montant total, en milliers d'euros, des recettes attendues à l'issue de cette campagne peut être estimé par $R(x)$, pour $x \in [1;15]$, où x représente le nombre d'envoi en milliers.

a) Représenter R sur l'intervalle $[1;15]$ (unités graphiques : 1 cm pour un millier d'envois sur l'axe des abscisses et 1 cm pour un millier d'euros sur l'axe des ordonnées).

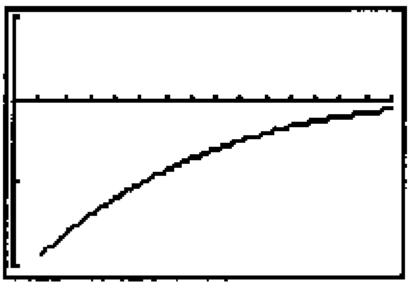
b) Le coût total en milliers d'euros de cette campagne est $C(x)=0,4+0,3x$ pour $x\in[1;15]$.
Représenter cette fonction dans le même repère que celui utilisé pour la fonction R.

3. Le bénéfice envisagé à l'issue de cette campagne publicitaire est donné par $B(x)=R(x)-C(x)$ pour tout réel x de $[1;15]$.

a) Donner, avec la seule précision que l'on peut obtenir par lecture graphique, les valeurs de x qui assurent un bénéfice positif.

b) On nomme B' la fonction dérivée de la fonction B. Etablir que $B'(x)=(1-0,1x)e^{-0,1x+0,1}-0,3$.

c) Soit B'' la fonction dérivée de B'.
Voici la courbe représentative de B'' telle qu'elle apparaît à l'écran d'une calculatrice graphique.
L'axe des abscisses est gradué de 1 en 1 depuis 0 jusqu'à 15. L'axe des ordonnées est gradué de 0,1 en 0,1 de $-0,2$ à 0,1.



Donner par lecture graphique le signe de B'' puis dresser le tableau de variation de B' sur $[1;15]$.

d) En déduire que l'équation $B'(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1;15]$, dont on donnera, à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie à 10^{-2}.

e) Déterminer, sur $[1;15]$, le signe de $B'(x)$.

4. Quel est le nombre d'envois, arrondi à la dizaine près, nécessaire pour obtenir un bénéfice maximal ? Que vaut alors ce bénéfice ?