EXERCICE 1 (3 points)

Commun à tous les candidats.

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles.
Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte.
Cocher cette réponse sur la feuille fournie en **ANNEXE 1, à rendre avec la copie.**

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1) Augmenter une quantité de 8%, puis la diminuer de 8% c'est :

- ☐ revenir à la quantité initiale
- ☐ augmenter la quantité initiale de 0,64%
- ☐ diminuer la quantité initiale de 0,64%

2) Le relevé des ventes de chaussures d'homme dans un magasin, en fonction des pointures, est le suivant :

Pointure	40	41	42	43	44	45	46
Nombre de paires vendues	10	12	15	13	5	5	1

La médiane de cette série est égale à :

- ☐ 13
- ☐ 42
- ☐ 43

3) Pour tout nombre réel a strictement positif, le nombre $\ln(a^2+3a)$ est égal à :

- ☐ $\ln(a^2)+3\ln(a)$
- ☐ $\ln(a)+\ln(a+3)$
- ☐ $2\ln(a)+\ln(3a)$

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On étudie l'évolution de la population d'une ville au cours du temps.
Le tableau suivant donne le nombre d'habitants au 1^{er} janvier de chaque année (exprimé en milliers).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Nombre d'habitants	10,5	11,5	12,9	14,5	15,4	16,9

PARTIE A :

1) Calculer l'accroissement relatif de la population du 1^{er} janvier 2000 au 1^{er} janvier 2005 (donner la valeur décimale arrondie au centième).
2) Si le taux d'augmentation de cette population d'une année à l'autre du 1^{er} janvier 2000 au 1^{er} janvier 2005 avait été fixe et égal à 10 %, quel résultat aurait-on obtenu pour la population le 1^{er} janvier 2005 à partir du nombre d'habitants au 1^{er} janvier 2000 (donner la valeur décimale arrondie au dixième) ?

PARTIE B :

On modélise de façon continue l'évolution de cette population (exprimée en milliers d'habitants) pour une période de 8 années en utilisant la fonction f définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x)=10,5\times(1,1)^x$. Le nombre réel x, exprimé en années, représente le temps écoulé depuis le 1^{er} janvier 2000 ; ainsi le nombre $f(0)=10,5$ représente le nombre d'habitants (en milliers) au 1^{er} janvier 2000 (c'est-à-dire la population initiale).

1) **a.** Calculer le nombre $f(6,5)$, c'est-à-dire le nombre d'habitants (en milliers), que l'on peut prévoir en utilisant ce modèle pour le 1^{er} juillet 2006 (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

   b. En utilisant ce modèle quel nombre d'habitants (en milliers) peut-on prévoir au 1^{er} janvier 2007 (donner la valeur décimale arrondie au dixième) ?

2) Sur **l'ANNEXE 2, à rendre avec la copie**, on a tracé la représentation graphique (Γ) de la fonction f, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

   Utiliser le graphique (laisser apparents les traits de construction) pour donner le nombre d'habitants (en milliers) au 1^{er} octobre 2003.

3) On cherche à évaluer le temps minimum t écoulé depuis le 1^{er} janvier 2000, nécessaire pour que la population initiale double.
   a. À l'aide du graphique et en laissant apparents les traits de construction, donner une valeur approchée de t exprimée en années et en trimestres.
   b. Déterminer t par le calcul (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel de définitions

On désigne par y_1 et y_2 des nombres réels strictement positifs $y_2 > y_1$.

L'accroissement absolu de y_1 à y_2 est égal à $y_2 - y_1$.

L'accroissement relatif de y_1 à y_2 est égal à $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Lors de sa création au 1er janvier 2000, un club de sport a 300 adhérents. À la fin de la première année, trois quarts des adhérents se réinscrivent et 120 nouveaux membres adhèrent. Pour tout nombre entier naturel n, on appelle a_n le nombre d'adhérents du club, exprimé en centaines, n années après la création du club.

On a donc $a_0 = 3$.

On suppose que le nombre d'adhérents au club évolue de la même façon les années suivantes. Ainsi, pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 1,2$.

<u>PARTIE A</u> : Étude graphique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Dans le repère donné en **ANNEXE 2, à rendre avec la copie**, on a représenté la droite D d'équation $y = 0,75x + 1,2$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour les abscisses comprises entre 0 et 6.

1. Placer a_0 sur l'axe des abscisses et, en utilisant les droites D et Δ, placer sur l'axe des abscisses les valeurs a_1, a_2, a_3, a_4 (laisser apparents les traits de construction).

2. Quelle semble être la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

<u>PARTIE B</u> : Étude numérique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = a_n - 4,8$ pour tout nombre entier naturel n.

1) **a.** Calculer u_0.

b. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,75.

c. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $a_n = 4,8 - 1,8 \times (0,75)^n$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

2) Si l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit selon ce modèle, le club peut-il avoir 500 adhérents durant une année ? Pourquoi ?

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats.

On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accés à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs. On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60% des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51% des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit.

On choisit une personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un événement est assimilée à la fréquence correspondante.

On note :
A, l'événement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur A »
B, l'événement : « la personne choisie est abonnée au fournisseur B »
H, l'événement : « la personne choisie accède à Internet par le haut débit »

1) Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.

2) Montrer que la probabilité de l'événement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,20.

3) Montrer que la probabilité de l'événement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,54.

4) Calculer $p_H(A)$, probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

5) On choisit au hasard trois personnes dans cette population. On admet que le nombre de personnes est suffisamment grand pour assimiler le choix des trois personnes à des tirages successifs indépendants avec remise. Calculer la probabilité de l'événement :
« exactement deux des personnes choisies accédent à Internet par le haut débit ». On en donnera la valeur décimale arrondie au centième.

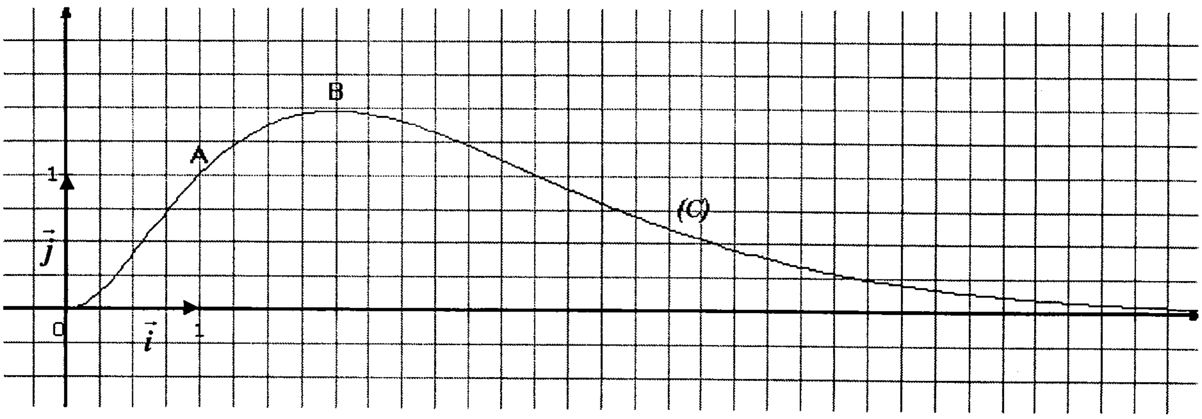
EXERCICE 4 (8 points)

Commun à tous les candidats

La courbe (C) donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ à valeurs strictement positives sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f.

On sait que :

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.
- La courbe (C) passe par les points O, A et B.
- Le point A a pour coordonnées $(1 ; 1)$; la droite (OA) est tangente à la courbe (C) au point A.
- Le point B a pour coordonnées $\left(2 ; \frac{4}{e}\right)$. Au point B, la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C).



PARTIE A :

1) **a.** Donner $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis $f'(1)$ et $f'(2)$ (justifier les résultats).

b. Montrer que, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dont l'une est le nombre 1 ; l'autre solution est notée α.

2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(f(x))$.

Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

PARTIE B :

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x^2\times e^{-x+1}$.

1) On rappelle que la fonction g est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln\big(f(x)\big)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $g(x)=-x+1+2\ln x$.

b. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on note g' sa fonction dérivée.

Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Retrouver, par le calcul, le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2) Soit la fonction dérivable h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=(x^2+2x+2)\times \mathrm{e}^{-x+1}$.

a. On note h' la fonction dérivée de h sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Calculer $h'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f(x)=-h'(x)$.

En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface comprise entre la courbe (C), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x=2$. Donner la valeur exacte, puis la valeur décimale arrondie au dixième.

ANNEXE 1

EXERCICE 1

Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie.

Ne cocher qu'une seule réponse par question.

1) Augmenter une quantité de 8%, puis la diminuer de 8%, c'est :	☐ revenir à la quantité initiale ☐ augmenter la quantité initiale de 0,64 % ☐ diminuer la quantité initiale de 0,64 %
2) La médiane de la série est égale à :	☐ 13 ☐ 42 ☐ 43
3) Pour tout nombre réel a strictement positif, $\ln(a^2+3a) =$	☐ $\ln(a^2)+3\ln(a)$ ☐ $\ln(a)+\ln(a+3)$ ☐ $2\ln(a)+\ln(3a)$

ANNEXE 2

EXERCICE 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

À rendre avec la copie