

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SUJET SORTI

SESSION 2005

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ DE MATHÉMATIQUES

Série L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'usage d'une calculatrice est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*Ce sujet comporte une annexe à rendre.
Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré.*

Exercice 1 (3 points)

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés. Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :

Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p ($1 \leq p \leq 26$) obtenu à l'aide de la formule

$$p \equiv 3 \times n + 7 \pmod{26}.$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car $3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 \equiv 17 \pmod{26}$.

1. Compléter la table de cryptage donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV.
Retrouver la forme décryptée du message.
3. Wilson désire lui répondre : MERCI.
Donner la forme cryptée de ce message.

Exercice 2 (5 points)

On rappelle que le nombre d'or noté Φ est tel que $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.

Soit $ABCD$ un carré. On considère :

- le milieu I du segment $[DC]$,
- le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon $[IA]$,
- le point d'intersection E de la demi-droite $[DC)$ et du cercle \mathcal{C} ,
- le point F tel que $AFED$ soit un rectangle.

1. Compléter la figure donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
2. Exprimer DI en fonction de AD .
3. Montrer que $IA^2 = \frac{5}{4}AD^2$, et en déduire l'expression de IE en fonction de AD .
4. Déduire des deux questions précédentes que $DE = \Phi \cdot AD$, et que le rectangle $AFED$ est un rectangle d'or.

Exercice 3 (6 points)

1. Soit la fonction t définie sur \mathbf{R} par $t(x) = 4x^2 - 5x + 1$.
Montrer que, pour tout réel x , $t(x) = (4x - 1)(x - 1)$.
En déduire le signe de $t(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(2x - 5) + \ln x$.
 - a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en 0.
 - b) Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{t(x)}{x}$.
 - c) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
 - d) Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Exercice 4 (6 points)

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4} .

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.

On note F l'événement "le véhicule contrôlé a des freins en bon état".

On note E l'événement "le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état".

\bar{E} et \bar{F} désignent les événements contraires de E et de F .

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.
2.
 - a) Déterminer la probabilité $P(\bar{F})$ de l'événement \bar{F} .
 - b) Quelle est la probabilité $P_{\bar{F}}(\bar{E})$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.
 - c) Montrer que la probabilité $P(E \cap F)$ de l'événement $E \cap F$ est égale à 0,8096.
 - d) Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?
3. Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

Table de cryptage à compléter :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| lettre | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| p | 10 | | | | | | | | | | | 17 | | | | | | | | | | | | | I | |
| forme cryptée | J | | | | | | | | | | | Q | | | | | | | | | | | | | A | |

Exercice 2

Figure à compléter :

