BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2006

MATHÉMATIQUES

- série L –

ENSEIGNEMENT de SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 3

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5
(la page 5/5 est à rendre avec la copie)

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Le but de cet exercice est de modéliser, par une suite numérique, les variations du stock d'une bibliothèque.

L'inventaire de janvier 2006 indique un effectif de 8000 ouvrages. Chaque année, 10 % des ouvrages sont égarés, tandis que 400 nouveaux ouvrages sont achetés.

Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre d'ouvrages en stock au début de l'année $2006+n$.

1. a) Indiquer la valeur de p_0.

   b) Calculer les valeurs prévisionnelles p_1 et p_2 de l'effectif du stock lors des inventaires de janvier 2007 et de janvier 2008.

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le terme général de la suite (p_n) vérifie la relation :

$$p_{n+1} = 0,9\,p_n + 400.$$

   b) En quelle année l'effectif du stock sera-t-il pour la première fois inférieur à 6000 ?

EXERCICE 2 (3 points)

On considère l'ensemble E défini par $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1. Préciser la signification de la phrase : « Le nombre entier A est congru à zéro modulo 12 ».

2. On admet que tout nombre entier est congru modulo 12 à un élément de E et un seul.

   a) Déterminer à quel élément de E le nombre 10 est congru modulo 12.

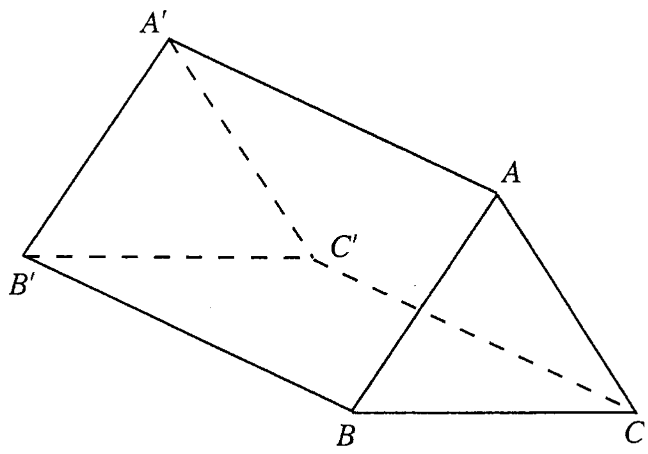
   b) Déterminer à quel élément de E le nombre 100 est congru modulo 12.

3. À tout entier n on associe l'élément u_n de E tel que 10^n soit congru à u_n modulo 12.
   Calculer $u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$ et u_9.

EXERCICE 3 (6 points)

Une passerelle autoroutière a la forme d'un prisme droit $ABCA'B'C'$ dont la base est un triangle isocèle ABC de sommet principal A : sur la figure ci-dessous, elle est représentée en perspective cavalière. La longueur de cette passerelle est 40 mètres et on a $AB = AC = 4$ m.

Formulaire : *volume d'un prisme = aire de la base × hauteur.*



En ce qui concerne les questions 1 et 2 ci-dessous, on laissera apparentes sur la feuille annexe toutes les constructions. Aucune autre justification n'est demandée.

1. Dans cette question, on cherche à représenter le prisme par une vue en perspective à points de fuite pour laquelle le plan ABC est un plan frontal.
   Sur la feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie, on a placé les points A, B, C, C' et la ligne d'horizon Δ.

   a) Placer sur la feuille annexe le point de fuite principal F.

   b) Compléter sur la feuille annexe la représentation en perspective à points de fuite du prisme $ABCA'B'C'$.

2. Soit I le milieu du segment $[BB']$ et J le milieu du segment $[CC']$. Le segment $[IJ]$ représente un joint de dilatation inséré dans le sol de la passerelle.
   Représenter le segment $[IJ]$ sur la figure de la feuille annexe.

3. Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Soit x la mesure de la longueur CH exprimée en mètres.

   a) Montrer que le nombre x est inférieur ou égal à 4. La valeur 4 peut-elle être atteinte ?

   b) Déterminer le volume maximal que peut avoir le prisme.

<u>EXERCICE 4</u> (6 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction qui permet d'estimer la taille d'un enfant de moins de 6 ans, en fonction de son âge .

Partie A : On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,1 ; 6] par :

$$f(x) = 70 + 5x + 9\ln x.$$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant le résultat à l'unité la plus proche.

x	0,1	0,3	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0,1 ; 6].

3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal : 1 cm représente 0,5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B : La fonction f de la partie A permet d'estimer la taille, exprimée en cm, d'un enfant de moins de 6 ans, en fonction de son âge x, exprimé en années.
Cette taille est donc donnée par $f(x) = 70 + 5x + 9\ln x$.

1. Calculer une estimation de la taille d'un enfant de 2 ans et demi, arrondie au centimètre.

2. Retrouver le résultat de la question précédente par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie A.

3. Évaluer l'âge d'un enfant mesurant 1 m par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie A.

FEUILLE ANNEXE - EXERCICE 3
(à rendre avec la copie)