BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

SPECIALITE

Série : S

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

L'annexe en page 5 est à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le sujet est composé de QUATRE exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>Exercice 1</u> *(6 points)*

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient *15* boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément *2* boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'événement G : "obtenir deux boules de même couleur".

Partie A

On suppose que l'urne contient *3* boules noires et *7* boules blanches.
Calculer la probabilité de l'événement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n,b,r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.

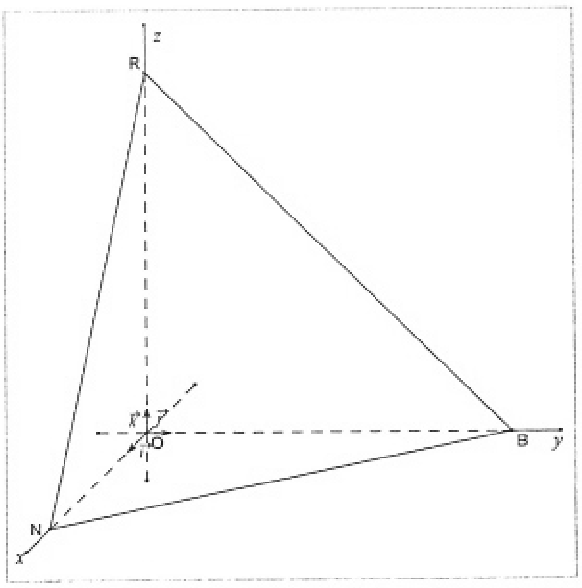
   Démontrer que $g(n,b,r) = \dfrac{1}{210}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$.

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité $g(n,b,r)$ soit minimale.
   L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormal.
   Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $(0\ ;15\ ;\ 0)$ et $(0\ ;\ 0\ ;\ 15)$ et soit M le point de coordonnées (n,b,r). On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.
   a- Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.
   b- En déduire que le point M est un point du plan (NBR).
   c- Démontrer que $g(n,b,r) = \dfrac{1}{210}(OM^2-15)$.
   d- Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.
   e- En déduire les valeurs de n, b et r afin que la probabilité $g(n,b,r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit $\dfrac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
1- Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et de k.
2- Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



Exercice 2 *(5 points)*

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ABC est un triangle équilatéral du plan tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixé et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = t\,\overrightarrow{CA}$.

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.
On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ direct.
On note a, b, c, m, n et p les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

   a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.
   b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
   On notera G ce centre de gravité.
   c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

   a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{A(1-t)\,;\,B(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.
   On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.
   b. Soit σ_1 la similitude directe de centre G, de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.
   Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.
   c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

Exercice 3 *(5 points)*

Question de cours :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ,\ b]$ de I.

Partie A :

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [0 ;1].
On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle [0 ;1].

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 x\,f'(x)\,dx .$$

2. En déduire que $\int_0^1 (f(x) - f(1))\,dx = -\int_0^1 x\,f'(x)\,dx$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme népérien.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-2 ;2[par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
Soit C la courbe représentative de f sur l'intervalle]-2 ; 2[dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a- Montrer que pour tout réel x de l'intervalle]-2 ; 2[, on a $f'(x) = \frac{4}{4-x^2}$

   b- En déduire les variations de f sur l'intervalle]-2 ; 2[.

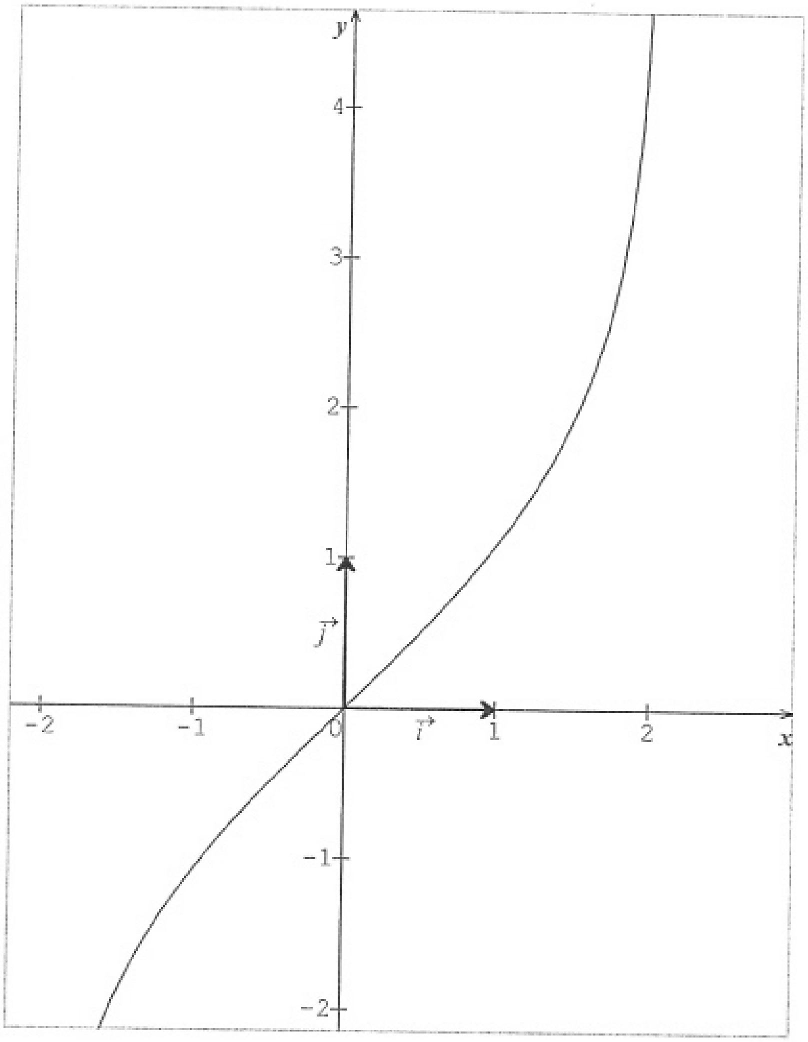
Partie C

La courbe C est tracée sur la feuille annexe.

Hachurer sur cette feuille la partie P du plan constituée des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$0 \le x \le 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \le y \le \ln 3$$

En utilisant la partie A, calculer en cm² l'aire de P.


y
4
3
2
1
$\vec{j}$
-2
-1
0
$\vec{i}$
1
2
x
-1
-2

Exercice 4 *(4 points)*

Soit $v = (v_n)_{n \geq 0}$ une suite.

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{-v_n} + 1$.

Partie A *(3 points)*

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne 0,75 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point et l'absence de réponse est comptée 0 point.
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Si $v_0 = \ln a$ alors :

   a) $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b) $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c) $u_0 = -a + 1$ d) $u_0 = e^{-a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

   a) u est strictement décroissante et majorée par 2
   b) u est strictement croissante et minorée par 1
   c) u est strictement croissante et majorée par 2
   d) u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$ alors :

   a) u converge vers 2
   b) u diverge vers $+\infty$
   c) u converge vers 1
   d) u converge vers un réel L tel que $L > 1$

4. Si v est majorée par 2 alors :

   a) u est majorée par $1 + e^{-2}$
   b) u est minorée par $1 + e^{-2}$
   c) u est majorée par $1 + e^{2}$
   d) u est minorée par $1 + e^{2}$

Partie B *(1 point).*

Démontrer, que pour tout entier naturel n, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.