BACCALAURÉAT GENERAL

SESSION 2009

MATHÉMATIQUES

SERIE S

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 9

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

2 feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

--*-*

Le candidat doit traiter les quatre exercices

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_3$.
Dans l'entreprise, toutes ces paires de chaussettes sont regroupées dans un stock unique.
La moitié des paires de chaussettes est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$, le tiers par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ et le reste par le fournisseur $\mathcal{F}_3$.

Une étude statistique a montré que

- 5 % des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ ont un défaut ;
- 1,5% des paires de chaussettes fabriquées par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5% des paires de chaussettes ont un défaut.

1) On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

On considère les événements F_1, F_2, F_3 et D suivants :

- F_1 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ » ;
- F_2 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_2$ » ;
- F_3 : « La paire de chaussettes prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$ » ;
- D : « La paire de chaussettes prélevée présente un défaut ».

a) Traduire en termes de probabilités les données de l'énoncé en utilisant les événements précédents.
Dans la suite, on pourra utiliser un arbre pondéré associé à cette expérience.
b) Calculer la probabilité que la paire de chaussettes prélevée soit fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_1$ et présente un défaut.
c) Calculer la probabilité de l'événement $F_2 \cap D$.
d) En déduire la probabilité de l'événement $F_3 \cap D$.
e) Sachant que la paire de chaussette prélevée est fabriquée par le fournisseur $\mathcal{F}_3$, quelle est la probabilité qu'elle présente un défaut ?

2) L'entreprise conditionne les paires de chaussettes par lots de six paires.
On considère que le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix des six paires de chaussettes à des tirages indépendants, successifs avec remise.

a) Calculer la probabilité que deux paires de chaussettes exactement d'un lot présentent un défaut ; on donnera un résultat arrondi au millième.
b) Démontrer que la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus une paire de chaussettes d'un lot présente un défaut est égale à 0,983.

Exercice 2 : (*5 points*)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1) On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$

a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

b) Soit N un entier relatif solution du système.
Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où x et y sont deux entiers relatifs.

d) En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18\,(221)$ et $\begin{cases} N \equiv 5\,(13) \\ N \equiv 1\,(17) \end{cases}$.

2) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1 \quad (17)$?

b) Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18 \quad (221)$?

Exercice 3 : (*6 points*)
Commun à tous les candidats

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E), admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$.
3) Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1) Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
   b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.
   c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3) Recherche d'une valeur approchée de α
   a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.
   b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
   En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 4 : (*4 points*)
Commun à tous les candidats

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont ***une seule*** *est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.*
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1) Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y'+2y=6$ qui vérifie la condition initiale $f(0)=1$ est définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par :

Réponse (1): $f(x)=-2e^{-2x}+3$; **Réponse (2):** $f(x)=-2e^{2x}+3$ **Réponse (3):** $f(x)=-2e^{-2x}-3$

2) Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.
Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1): $\{(A,1),(C,2)\}$; **Réponse (2):** $\{(A,1),(B,2),(C,2)\}$ **Réponse (3):** $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$

3) Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $x-3y+2z=5$ et le point $A(2,3,-1)$.
Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ est le point :

Réponse (1): $H_1(3,-1,4)$ **Réponse (2):** $H_2(4,-3,-4)$ **Réponse (3):** $H_3(3,0,1)$

4) Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1): $-\dfrac{\pi}{2}$ **Réponse (2):** $\dfrac{\pi}{4}$ **Réponse (3):** $\dfrac{\pi}{2}$