BACCALAUREAT GENERAL

MATHEMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2+3\mathrm{i}$, $-3-\mathrm{i}$ et $2{,}08+1{,}98\mathrm{i}$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle — **(b)** : rectangle et non isocèle
(c) : rectangle et isocèle — **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. A tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\mathrm{i}}{z+2}$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'|=1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 — **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point — **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle — **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point — **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i.
L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

(a) : $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ — **(b)** : $z' = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

(c) : $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ — **(d)** : $z' = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$

EXERCICE 2 (6 points)

Le graphique de l'annexe figurant page 6 sera complété et remis avec la copie.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
   Montrer que si $x \in [1 ; 2]$ alors $f(x) \in [1 ; 2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur **N** par :

- $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

a) Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

- Pour tout entier naturel n, $1 \leq v_n \leq 2$.
- Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leq v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :

- Pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
- Pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a) Étudier la limite de f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

   c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ.

2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=x e^{-x}+2(1-e^{-x})$.

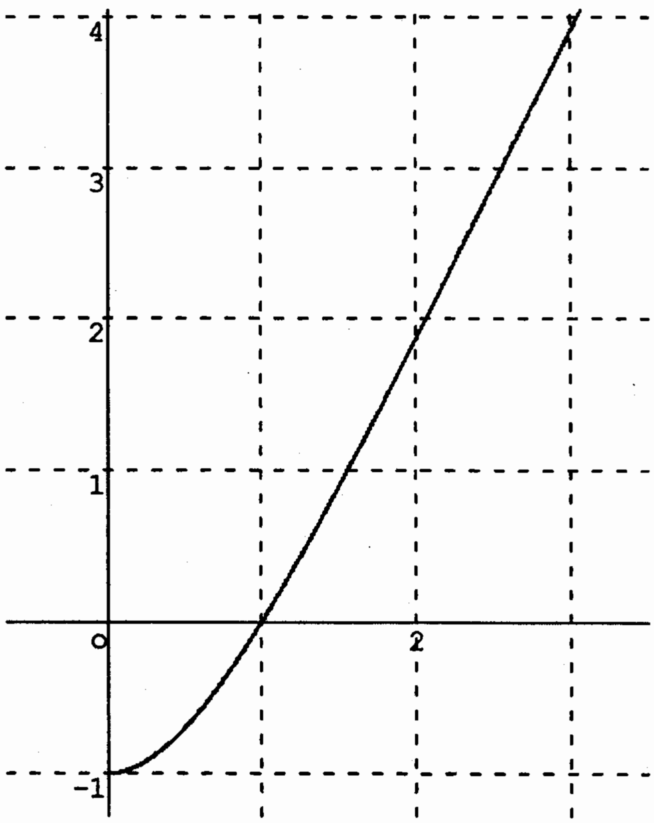
   b) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) > 0$.

   c) Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variation de f.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4. a) Déterminer le point A de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ.

   b) Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



EXERCICE 4 (5 points)

La figure jointe en annexe page 7 sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 1 + \sqrt{5}$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

1. a) *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

   b) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3. On note D l'image du point C par la similitude S.

   a) Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.

   b) Montrer que $CD = 3 + \sqrt{5}$.

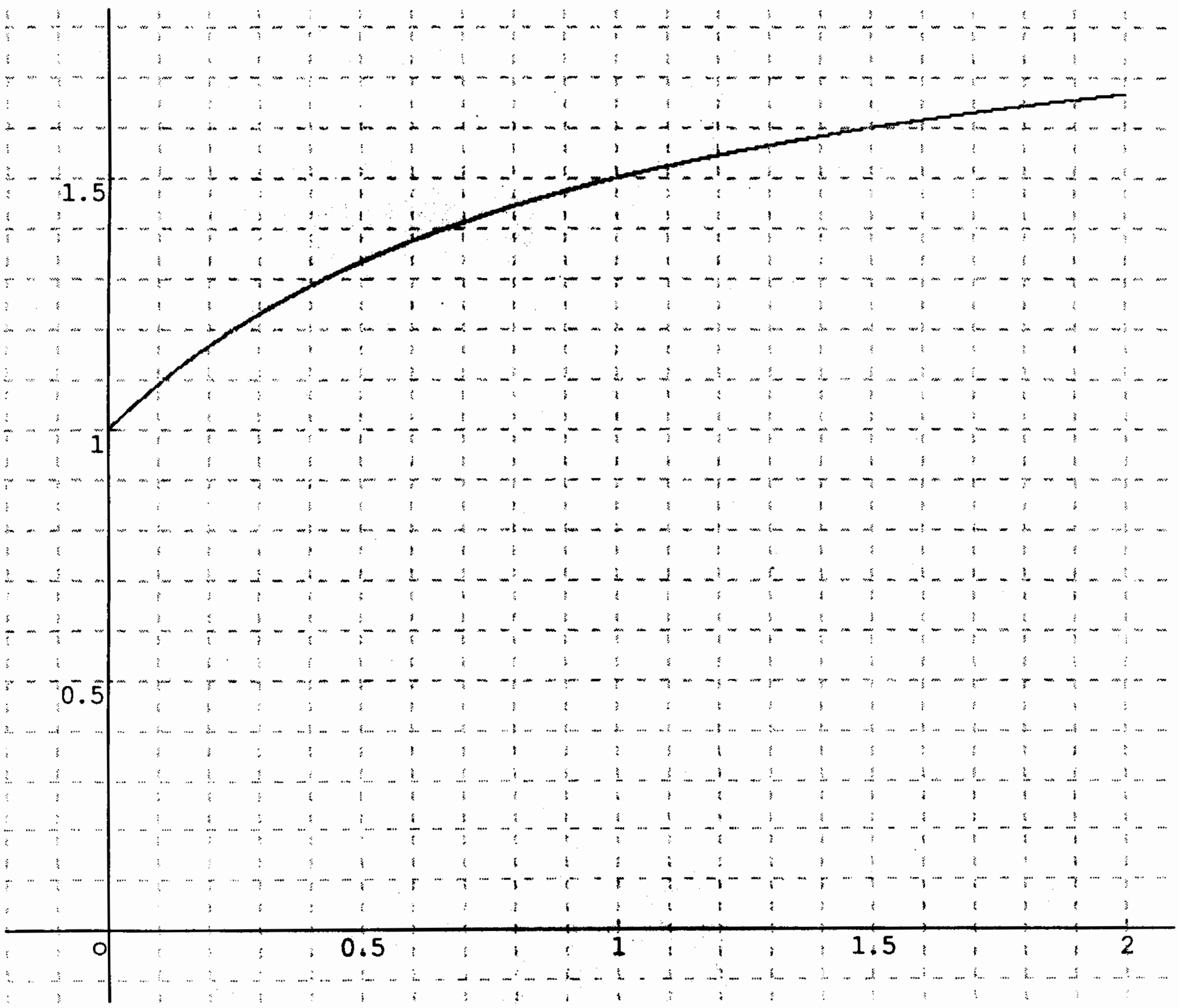
4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

   a) Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

   b) Quelle est la nature du quadrilatère BFDE ?

Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe : exercice 2



Cette page sera remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Annexe 2 : exercice 4