BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher de 3 sortes :
4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Lors d'un premier jeu, le joueur commence par miser 30 centimes d'euro. Il tire ensuite un bulletin de l'urne et l'y remet après l'avoir lu.
Si le bulletin tiré est marqué « oui », le joueur reçoit 60 centimes d'euro, s'il est marqué « non », il ne reçoit rien. Si le bulletin tiré est marqué «blanc », il reçoit 20 centimes d'euro.

Question 1 : Le jeu est

A : favorable au joueur B : défavorable au joueur C : équitable

Question 2 : Le joueur joue 4 parties indépendamment les unes des autres.
La probabilité qu'il tire au moins une fois un bulletin marqué « oui » est égale à

A : $\frac{216}{625}$ B : $\frac{544}{625}$ C : $\frac{2}{5}$

Lors d'un second jeu, le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne.

Question 3 : la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à

A : $\frac{4}{15}$ B : $\frac{11}{30}$ C : $\frac{11}{15}$

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit Ω le point d'affixe 2.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a) Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \mapsto \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$.

c) Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}(2 - z')$.

2. **a) Question de cours**

- *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.

b) Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.

3. Soit A_0 le point d'affixe 2 + i.
On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :
pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \sigma(A_n)$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

b) Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geq n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

EXERCICE 3 (5 points)

1. On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$

On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0	$2{,}3$	x_0	$2{,}4$	$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrer **toutes** les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5\ln x}{x}$

a) Démontrer que $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^{\ 2}}$ où x_0 est le réel apparaissant dans le tableau ci-dessus.

b) Soit a un réel. Pour $a > 1$, exprimer $\int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de a.

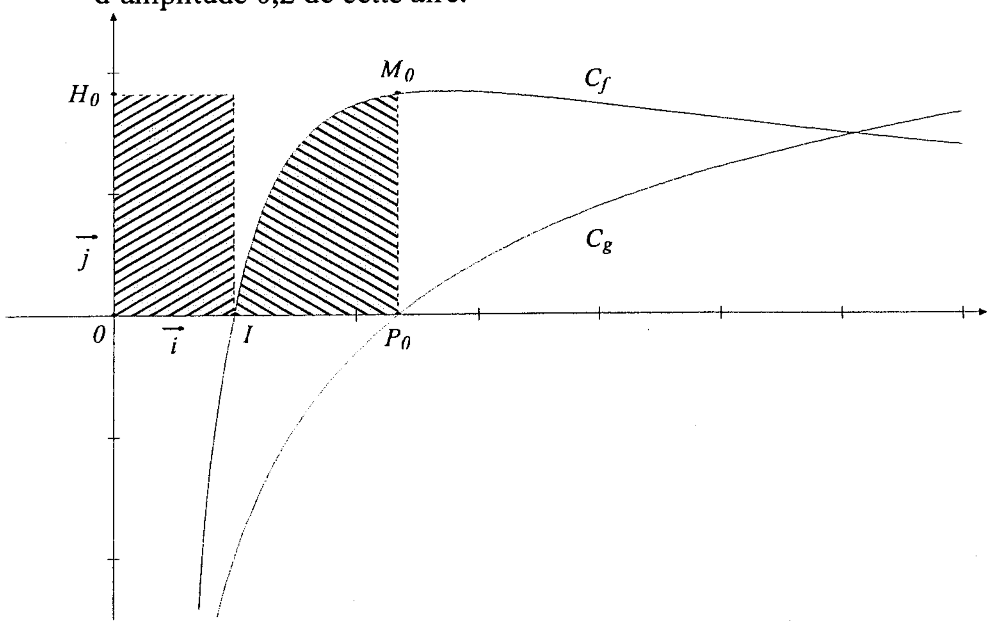
3. On a tracé dans le repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g notées respectivement (C_f) et (C_g).

On appelle I le point de coordonnées (1,0), P_0 le point d'intersection de (C_g) et de l'axe des abscisses, M_0 le point de (C_f) ayant même abscisse que P_0, et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

On nomme $\mathscr{D}_1$ le domaine du plan délimité par la courbe (C_f) et les segments $[IP_0]$ et $[P_0M_0]$.

On nomme $\mathscr{D}_2$ le domaine du plan délimité par le rectangle construit à partir de $[OI]$ et $[OH_0]$.

Démontrer que les deux domaines $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont même aire, puis donner un encadrement d'amplitude 0,2 de cette aire.



EXERCICE 4 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
On s'intéresse aux fonctions f dérivables sur $[0,+\infty[$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} (1) : \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } [0,+\infty[\quad f'(x) = 4-(f(x))^2 \\ \\ (2) : f(0)=0 \end{cases}$$

On admet qu'il existe une unique fonction f vérifiant simultanément (1) et (2).

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.
L'annexe, page 6, sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A. Étude d'une suite

Afin d'obtenir une approximation de la courbe représentative de la fonction f, on utilise la méthode itérative d'Euler avec un pas égal à 0,2.
On obtient ainsi une suite de points notés (M_n), d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0=0 & \text{et pour tout entier naturel } n, \quad x_{n+1} = x_n + 0{,}2 \\ y_0=0 & \text{et pour tout entier naturel } n, \quad y_{n+1} = -0{,}2\,y_n^{\,2} + y_n + 0{,}8 \end{cases}$$

1. **a)** Les coordonnées des premiers points sont consignées dans le tableau de l'annexe, page 6. Compléter ce tableau. On donnera les résultats à 10^{-4} près.

b) Placer, sur le graphique donné en annexe à la page 6, les points M_n pour n entier naturel inférieur ou égal à 7.

c) D'après ce graphique, que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (y_n) et sur sa convergence ?

2. **a)** Pour x réel, on pose $p(x) = -0{,}2\,x^2 + x + 0{,}8$.
Montrer que si $x \in [0,2]$ alors $p(x) \in [0,2]$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le y_n \le 2$.

c) Étudier le sens de variation de la suite (y_n).

d) La suite (y_n) est-elle convergente ?

Partie B. Étude d'une fonction

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = 2\,\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et (C_g) sa courbe représentative.

1. Montrer que la fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. **a)** Montrer que (C_g) admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

b) Étudier les variations de g sur $[0,+\infty[$.

3. Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à (C_g) à l'origine.

4. Tracer, dans le repère de l'annexe, page 6, la courbe (C_g) et les éléments mis en évidence dans les questions précédentes de cette partie **B**.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 4 : Annexe

Partie A

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4					
y_n	0	0,8000	1,4720					

Partie B