BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : 7

obligatoire

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances.

> Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
>
> (i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :
>
> $$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$
>
> (ii) Pour tous nombres réels a et b :
>
> $$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2) Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité.

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4.
On lit le nombre sur la face cachée.
Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée.
Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4, dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1) Sachant que $p_4 = 0{,}4$ démontrer que $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}2$ et $p_3 = 0{,}3$.

2) On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

3) On lance 10 fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants.
   On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   a) Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.
   c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$. On donnera une valeur arrondie au millième.

4) Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux.
   On note U_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   b) Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $S_{n_0} > 0{,}999$.

Exercice 3 (*6 points*).
Commun à tous les candidats.

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble **R** des nombres réels par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Etude de la fonction f.

1) Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.
2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur **R**.
4) Dresser le tableau des variations de f.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

1) On considère les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.
   Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
   a) Calculer A_n.
   b) Etudier la limite éventuelle de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif. On note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\lambda}^{0}\pi[f(x)]^2\,dx$.

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda\le x\le 0$.

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que :
   pour tout nombre réel x : $\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{ae^x}{e^x+1}+\dfrac{be^x}{(e^x+1)^2}$.
2) Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.
3) Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

$ABCDEFGH$ est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe, qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a) Calculer les coordonnées de I.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière.

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathscr{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}$;
- $\mathscr{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathscr{P}_k$ et de la droite (BC).

1) Identifier $\mathscr{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
2) Calcul des coordonnées de N_k.
   a) Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
   b) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}_k$ dans ce repère.
   c) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1; 3k-1; 0)$.
3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}_{\frac{1}{2}}$.

   Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie.