BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2006

MATHÉMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures** – COEFFICIENT : 9

spécialité

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

1 feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*4 points*)
Commun à tous les candidats

Partie A. Restitution organisée de connaissances.

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

(i) Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r > 0 \end{cases}$$

(ii) Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}.$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Partie B.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.
On rappelle que si z est un nombre complexe, $\bar{z}$ désigne le conjugué de z et $|z|$ désigne le module de z.

1) Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2) Si $z + \bar{z} = 0$, alors $z = 0$.
3) Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$.
4) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 2 (*5 points*)

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ modulo p ».

Partie A. Quelques exemples.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2) Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.
   En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5) A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier.

Soit p un nombre premier différent de 2.

1) Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1$ modulo p.
2) Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1$ modulo p. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1$ modulo p, et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   a) Démontrer que $4^r \equiv 1$ modulo p. En déduire que $r = 0$.
   b) Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   c) En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 3 (*6 points*).
Commun à tous les candidats.

On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par $f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, (unité graphique : 5 cm).

Partie A. Etude de la fonction f.

1) Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
2) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur $\mathbf{R}$.
4) Dresser le tableau des variations de f.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie B. Quelques propriétés graphiques.

1) On considère les points M et M' de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment $[MM']$.
   Que représente le point A pour la courbe $\mathscr{C}$?

2) Soit n un entier naturel. On désigne par D_n le domaine du plan limité par la droite d'équation $y=1$, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. A_n désigne l'aire du domaine D_n exprimée en unité d'aire.
   a) Calculer A_n.
   b) Etudier la limite éventuelle de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie C. Calcul d'un volume.

Soit λ un réel positif. On note $\mathscr{V}(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^{0}\pi\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

On admet que $\mathscr{V}(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses, de la portion de la courbe $\mathscr{C}$ obtenue pour $-\lambda\leq x\leq 0$.

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que :
   pour tout nombre réel x : $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{a\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}+\frac{b\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$.
2) Exprimer $\mathscr{V}(\lambda)$ en fonction de λ.
3) Déterminer la limite de $\mathscr{V}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (*5 points*)
Commun à tous les candidats

ABCDEFGH est le cube d'arête 1 représenté sur la feuille annexe, qui sera complétée et rendue avec la copie. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Partie A. Un triangle et son centre de gravité.

1) Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.
2) Soit I le centre de gravité du triangle BDE.
   a) Calculer les coordonnées de I.
   b) Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$. Que peut-on en déduire pour les points A, I, G ?
3) Prouver que I est le projeté orthogonal de A sur le plan (BDE).

Partie B. Une droite particulière.

Pour tout nombre réel k, on définit deux points M_k et N_k, ainsi qu'un plan $\mathcal{P}_k$ de la façon suivante :

- M_k est le point de la droite (AG) tel que $\overrightarrow{AM_k}=k\overrightarrow{AG}$;
- $\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE) ;
- N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

1) Identifier $\mathcal{P}_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{3}}$ et $N_{\frac{1}{3}}$ en utilisant des points déjà définis. Calculer la distance $M_{\frac{1}{3}}N_{\frac{1}{3}}$.
2) Calcul des coordonnées de N_k.
   a) Calculer les coordonnées de M_k dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.
   b) Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}_k$ dans ce repère.
   c) En déduire que le point N_k a pour coordonnées $(1;3k-1;0)$.
3) Pour quelles valeurs de k la droite (M_kN_k) est-elle orthogonale à la fois aux droites (AG) et (BC) ?
4) Pour quelles valeurs de k la distance M_kN_k est-elle minimale ?
5) Tracer sur la figure donnée en annexe, la section du cube par le plan $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}}$.

   Tracer la droite $\left(M_{\frac{1}{2}}N_{\frac{1}{2}}\right)$ sur la même figure.

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie.