BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2006

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

obligatoire

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère les points $A(2,4,1)$, $B(0,4,-3)$, $C(3,1,-3)$, $D(1,0,-2)$, $E(3,2,-1)$, $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.
Pour chaque question, il est compté un point si la réponse est exacte et zéro sinon.

1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.

2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$(CD)\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

5) Le point I est sur la droite (AB).

EXERCICE 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{1-x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$; quelle conséquence graphique pour $\mathscr{C}$ peut-on en tirer ?

b) Justifier que f est dérivable sur **R**. Déterminer sa fonction dérivée f'.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x$.

a) Établir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b) Calculer I_1, puis I_2.

c) Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question **1c)**.

3) **a)** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leqslant x^n \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}\, x^n$.

b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3 **(5 points)**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Dans tout l'exercice, $P\setminus\{O\}$ désigne le plan P privé du point origine O.

1) Question de cours

On prend comme pré-requis les résultats suivants :

- Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
- Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = (\vec{u} ; \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

a) Soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

b) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.

2) On considère l'application f de $P\setminus\{O\}$ dans $P\setminus\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, associe le point M$'$ d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

a) Démontrer que pour $z \neq 0$, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif.
En déduire que, pour tout point M de $P\setminus\{O\}$ les points M et M$' = f(\text{M})$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

b) Déterminer l'ensemble des points M de $P\setminus\{O\}$ tels que $f(\text{M}) = \text{M}$.

c) M est un point du plan P distinct de O, U, et V, on admet que M$'$ est aussi distinct de O, U, et V.

Établir l'égalité $\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}} = \dfrac{1}{\text{i}}\left(\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+\text{i}}\right) = -\text{i}\,\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)}$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-\text{i}}\right)$ et $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-\text{i}}\right)$.

3) a) Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq \text{i}$ et soit M le point d'affixe z. Démontrer que M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-\text{i}}$ est un nombre réel non nul.

b) Déterminer l'image par f de la droite (UV) privée de U et de V.

EXERCICE 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

1) Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre un ballon afin de le crever. A chacun de ces tirs, il a la probabilité 0,2 de crever le ballon. Le tireur s'arrête quand le ballon est crevé. Les tirs successifs sont supposés indépendants.

a) Quelle est la probabilité qu'au bout de deux tirs le ballon soit intact ?

b) Quelle est la probabilité que deux tirs suffisent pour crever le ballon ?

c) Quelle est la probabilité p_n que n tirs suffisent pour crever le ballon ?

d) Pour quelles valeurs de n a-t-on : $p_n > 0{,}99$?

2) Ce tireur participe au jeu suivant :

Dans un premier temps il lance un dé tétraédrique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4 (la face obtenue avec un tel dé est la face cachée) ; soit k le numéro de la face obtenue. Le tireur se rend alors au stand de tir et il a droit à k tirs pour crever le ballon.

Démontrer que, si le dé est bien équilibré, la probabilité de crever le ballon est égale à 0,4096 (on pourra utiliser un arbre pondéré).

3) Le tireur décide de tester le dé tétraédrique afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé. Pour cela il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

a) Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

b) On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

c) On effectue maintenant 1 000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré et on calcule pour chaque simulation le nombre d^2. On obtient pour la série statistique des 1000 valeurs de d^2 les résultats suivants :

Minimum	**D_1**	**Q_1**	**Médiane**	**Q_3**	**D_9**	**Maximum**
0,00124	0,00192	0,00235	0,00281	0,00345	0,00452	0,01015

Au risque de 10 %, peut-on considérer que ce dé est pipé ?