BACCALAUREAT GENERAL

Session 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5) Calculer l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$, vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle : (E′) $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E′).

c) Conclure.

3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4) La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Aucune justification n'est demandée.

1) Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128\mathrm{i}$. **C** : $z^{14} = -64 + 64\mathrm{i}\sqrt{3}$.

B : $z^{14} = 64 - 64\mathrm{i}$. **D** : $z^{14} = -128 + 128\mathrm{i}\sqrt{3}$.

2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe 4i. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4\mathrm{i}|$.

A : (E) est la médiatrice du segment [ST].

B : (E) est la droite (ST).

C : (E) est le cercle de centre Ω, d'affixe $3 - 4\mathrm{i}$, et de rayon 3.

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3) On considère un hexagone régulier ABCDEF, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CF}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$. **B :** -3. **C :** $-\sqrt{3}$. **D :** $\frac{3}{2}$.

4) Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ par $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x-3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.

B : Γ n'admet pas d'asymptote.

C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.

D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5) Soit la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. La fonction f'', dérivée seconde de la fonction f sur **R**, est définie par :

A : $f''(x) = \int_0^x -2t\,\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. **C** : $f''(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

B : $f''(x) = \int_0^1 -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. **D** : $f''(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par le point B(1 ; −2 ; 1) et de vecteur normal $\vec{n}(-2\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et le plan $\mathscr{R}$ d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires.

b) Démontrer que l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ est la droite Δ passant par le point C(−1 ; 4 ; −1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

c) Soit le point A(5 ; −2 ; −1). Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$, puis la distance du point A au plan $\mathscr{R}$.

d) Déterminer la distance du point A à la droite Δ.

2) **a)** Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1 + 2t\ ;\ 3 - t\ ;\ t)$.
Déterminer en fonction de t la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de **R** dans **R**.

b) Étudier le sens de variation de la fonction φ sur **R** ; préciser son minimum.

c) Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

EXERCICE 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les événements suivants :

E est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'événement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1) Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2) On effectue dix parties identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela, on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face i est cachée ; on obtient les résultats suivants :

Face i	1	2	3	4
Effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face i et d^2_{obs} le réel $\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(\mathrm{F}_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du chiffre i. Le 9^e décile de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098.

Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10%, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?