

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures — COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour
une part importante dans l'appréciation des copies.*

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratifs ou techniques).

12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
 - a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
 - b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
 - c. On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.

2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0 ; 1]$.
On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15mn et 20mn ?

3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

Exercice 2 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$.

Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$.

À tout complexe z différent de z_A on associe le complexe $z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$.

a. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

Montrer que $B \in (E)$.

Déterminer et construire l'ensemble (E) .

b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

Déterminer et construire (F) .

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point

$I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x .

a. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n supérieur ou égal à k ,

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}.$$

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à k ,

$$\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}.$$

c. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2. a. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1.$$

(on pourra écrire $\frac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de $n-1$ facteurs supérieurs ou égaux à 1).

b. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Exercice 4 (7 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$, et (C) sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et sa limite en $-\infty$.

2. Calculer, pour tout réel x , $f(x) + f(-x)$.

— Que peut-on en déduire pour le point $A(0 ; 1 + \ln 4)$?

3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.

4. a. Justifier que, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans \mathbb{R} .

b. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de la solution a de l'équation $f(x) = 3$.

Justifier la réponse.

— c. Pour quelle valeur de m le nombre $-a$ est-il la solution de l'équation $f(x) = m$?

5. a. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$.

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ sont des asymptotes de la courbe (C) .

Étudier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote (Δ) .

6. a. On considère un réel positif α . Que représente l'intégrale : $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - x - \ln 4] dx$?

b. Montrer que $I(\alpha) = 2 \ln \left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} \right)$ (on pourra utiliser le résultat de la question 5. a.).

c. Calculer α pour que $I(\alpha) = 1$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.