BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

La page 6/6 est une annexe à rendre avec la copie.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.   ***Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.***   ***Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

EXERCICE 1 (3 points)

Pour chacune des trois questions, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie, sans justification.
Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. On désigne par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une loi de probabilité p.

   On sait que $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \frac{4}{5}$ et $p(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{3}{5}$.

   La probabilité de l'événement B est égale à :

   a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

2. On note X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}04$.

   On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'événement ($X \leqslant t$), notée p ($X \leqslant t$), est donnée par : $p\ (X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

   La valeur approchée de $p(X > 5)$ à 10^{-2} près par excès est égale à :

   a. 0,91 b. 0,18 c. 0,19 d. 0,82

3. Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre.

   S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.

   Je sors mon chien ; la probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à :

   a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{27}{40}$ c. $\frac{3}{4}$ d. $\frac{27}{28}$

EXERCICE 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)+\frac{1}{3}x$.

La courbe(C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

   c) Étudier la position relative de (D) et de (C).

   d) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)-\frac{2}{3}x$.

   e) En déduire la limite de f en $-\infty$.

2. a) On note $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que pour tout x réel, $f\,'(x)=\dfrac{e^{x}-2}{3(e^{x}+1)}$.

   b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n , l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n=\int_0^n \ln\left(1+e^{-x}\right)\mathrm{d}x$
2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1+e^{-x}\right)\leqslant e^{-x}$.

   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n\leqslant 1$.
3. La suite $(d_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente ?

Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe (C).
On note (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.

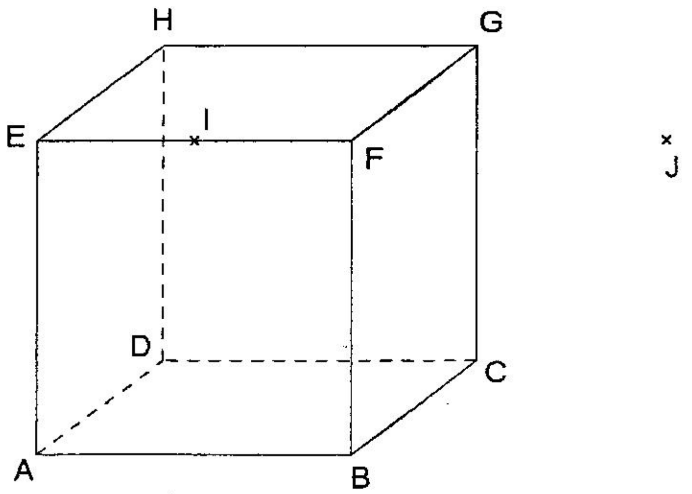
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Soient M et N deux points de la courbe (C) d'abscisses non nulles et opposées.
   Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur **1. On désigne** par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. a) Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
   c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$.
   d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

      Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

/

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal **direct** $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = -3$.

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3} i z^2$.

On note O', A', B' et C' les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. a) Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A', B' et C'.

   b) Placer les points A', B' et C'.

   c) Démontrer l'alignement des points O, A et B' ainsi que celui des points O, B et A'.

2. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G' le point associé à G par f.

   a) Déterminer les affixes des points G et G'.

   b) Le point G' est-il l'isobarycentre des points O', A', B' et C' ?

3. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 3