BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2010

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$.

1. a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

   b) Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note (D) la droite passant par les points A $(1,-2,-1)$ et B $(3,-5,-2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}. \\ z = -1-t \end{cases}$$

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2-k \\ y = 1+2k \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}. \\ z = k \end{cases}$$

   Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

   a) Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

   b) Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}\,(1,1,-1)$.

   a) Montrer que les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

   b) Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est $3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$. »

2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.

   On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »

3. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.

   Proposition 3 : « Si l'entier naturel n est un multiple de 3 alors z^n est un réel. »

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, le point A d'affixe $a = 2 - i$ et le point B d'affixe $b = \frac{1+i}{2}a$.

   Proposition 4 : « Le triangle OAB est rectangle isocèle. »

5. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, à tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{-10}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le nombre conjugué de z.

   Proposition 5 : « Il existe un point M tel que O, M et M' ne sont pas alignés. »

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=x^2-2+\ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0,+\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. a) Montrer que l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique sur $]0,+\infty[$.

   On note α cette solution.

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Montrer l'égalité : $\ln\alpha = 2-\alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^2+(2-\ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0,+\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.

2. En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0,2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0,+\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM=\sqrt{f(x)}$.

2. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

   a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0,+\infty[$.

   b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.

   c) Montrer que $AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.

3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?