

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $e^0 = 1$.
- Pour tous réels x et y , $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Démontrer que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1 . En déduire u_0 .

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note (D) la droite passant par les points $A(1, -2, -1)$ et $B(3, -5, -2)$.

1. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

2. On note (D') la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbf{R}.$$

Montrer que les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.
- Montrer que le plan (P) contient la droite (D) .
 - Montrer que le plan (P) et la droite (D') se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.
4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}(1, 1, -1)$.
- Montrer que les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.
 - Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point A d'affixe $2-i$ et B l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On note I le milieu du segment [AB].

Proposition 1 : « La similitude directe de centre A qui transforme I en O a pour écriture complexe $z' = (1+i)z - 1 - 2i$. »

2. On appelle S l'ensemble des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation $3x - 5y = 2$.

Proposition 2 : « L'ensemble S est l'ensemble des couples $(5k-1, 3k-1)$ où k est un entier relatif. »

3. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{3}$, où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.

Proposition 3 : « Il existe des couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de (E) qui ne sont pas des couples de multiples de 3. »

4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Proposition 4 : « Pour tout entier naturel k ($2 \leq k \leq n$), le nombre $n! + k$ n'est pas un nombre premier. »

5. On considère l'équation (E') : $x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel.

Proposition 5 : « Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E'). »

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. Étudier les variations de u sur $]0, +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$.

On note α cette solution.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0, +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction \ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0, 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0, +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 - a) Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0, +\infty[$.
 - b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ , noté P , dont on précisera les coordonnées.
 - c) Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?