L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire N° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Deux feuilles de papier millimétré seront mises à la disposition des candidats.

oo0oo

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT L'EXERCICE ET LE PROBLÈME

EXERCICE (8 points)

Le tableau suivant donne l'espérance de vie d'une femme selon son année de naissance. (*source INSEE, bilan démographique*).

Année	1985	1988	1991	1994	1997	2000
rang de l'année x_i	0	3	6	9	12	15
Espérance de vie y_i	79,4	80,5	81,1	81,8	82,2	82,8

1) a) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal.
On graduera l'axe des abscisses de 0 à 25. On prendra sur cet axe pour unité graphique : 1 cm pour une unité.
On graduera l'axe des ordonnées à partir de 79. On prendra sur cet axe pour unité graphique : 2 cm pour une unité.

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et le placer dans le repère.

c) On admet que la droite (d) d'équation $y=0,22x+79,65$ constitue un bon ajustement de ce nuage. Vérifier que le point G appartient à (d).

d) Construire la droite (d) sur le graphique précédent.

2) Dans la suite de l'exercice on admet que la droite (d) permet d'estimer l'espérance de vie des femmes nées jusqu'en 2010.

a) En utilisant le graphique et en laissant les traits de construction apparents, estimer l'espérance de vie d'une femme née en 2006.

b) Sur la période de 6 ans allant de 1994 à 2000, l'espérance de vie a augmenté de 1,22%.
Ce taux se maintiendra-t-il sur la période allant de 2000 à 2006 ? Justifier la réponse.

3) Estimer graphiquement à partir de quelle année de naissance l'espérance de vie d'une fille devrait dépasser 85 ans.

PROBLEME (12 points)

Au cours d'une étude sur les rythmes cardiaques, on note toutes les cinq minutes à partir du temps $x = 0$, correspondant au début de l'épreuve physique, le rythme cardiaque d'un sportif en pulsations par minute. Les résultats obtenus ont permis de mettre en place un modèle mathématique étudié dans la partie A.

Partie A

On considère que la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;30]$ par $f(x) = -2x + 60 + 32\ln(x+1)$ permet d'estimer le rythme cardiaque à l'instant x exprimé en minutes.

1) f' désignant la fonction dérivée de la fonction f, calculer $f'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $[0\,;30]$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{2(15-x)}{x+1}$.

2) Sur l'intervalle $[0\,;30]$, étudier le signe de $f'(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f. On y fera figurer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(15)$, $f(30)$.

3) Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous, en arrondissant les valeurs à l'unité près :

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$						114	

4) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques : 2 cm pour 5 minutes sur l'axe des abscisses
1 cm pour 10 pulsations par minute sur l'axe des ordonnées.

Partie B :

1) Au bout de combien de temps le rythme cardiaque est-il maximal ?
Quelle valeur atteint-il ?

2) Quel est le rythme cardiaque du sportif au repos ?

3) À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

a) À quel instant le rythme est-il de 90 pulsations par minute ?

b) Dans les conditions de cette épreuve, on considère qu'une personne est en très bonne condition physique lorsque la durée pendant laquelle son cœur bat à plus de 1,5 fois sa vitesse au repos est inférieure à vingt minutes.
Ce sportif est-il en très bonne condition physique ? Justifier.

c) De même, une personne est considérée en mauvaise condition physique lorsque son rythme cardiaque atteint ou dépasse le double du rythme au repos.
Ce sportif est-il en mauvaise condition physique ? Justifier.

BACCALAURÉAT, SÉRIE SMS
FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. STATISTIQUE

Moyenne, variance, écart type

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ; \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - (\overline{x})^2$$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

III. ALGÈBRE

A. *SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMETRIQUES*

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

IV. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

$ln\, 1 = 0$

$ln\, e = 1$

$ln\, ab = ln\, a + ln\, b$

$ln \dfrac{a}{b} = ln\, a - ln\, b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\, x = e^x$ équivaut à $x = ln\, y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\, ln\, a} \quad (a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$ln\, a^x = x\, ln\, a$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS*

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$, n entier naturel

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$, n entier naturel non nul

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

D. *ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$