

BACCALAUREAT GENERAL**MATHEMATIQUES****Série S****Enseignement de Spécialité****Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (3 points)

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.

Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b . 2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b .

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut a » ;

B : « la montre tirée présente le défaut b » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.

2. Calculer la probabilité de l'événement D.

3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.

On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b .

On définit l'événement E « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par
$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 5 u_n - 6 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.
En déduire que pour tout entier naturel k , $u_{2k} \equiv 2$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.
3. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n .
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

EXERCICE 3 (7 points)

La page 6 sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$.

On note α_n cette solution. On a donc : pour tout entier naturel n , $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b) Sur la page 6, on a tracé Γ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Placer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c) Préciser la valeur de α_1 .

d) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.
b) Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = \ln x - x + 1$.
En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ .
c) Tracer Δ sur le graphique de la page 6.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la partie A, définir sur \mathbb{N} une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b , $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^3 = 8$.

2. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a , b et c définies par : $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$.

On appelle r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre A et

d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

On pose $B' = r'(B)$ et $C' = r(C)$ et on note b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b) Montrer que $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c) Montrer que b' et c' sont des nombres conjugués.

3. On appelle M, N, P et Q les milieux respectifs des segments [CB], [BB'], [B'C'] et [C'C]. On note m , n , p et q leurs affixes.

a) Montrer que l'affixe n du point N est égale à $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

En déduire que les points O, N et C sont alignés.

b) Montrer que $n + 1 = i(q + 1)$. Que peut-on en déduire pour le triangle MNQ ?

c) Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré.

Exercice 3

