BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$; unité graphique 2cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f, c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.

2. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, $(z'-1)(z+1) = -2$.

   b) En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe z différent de -1.

   Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

   a) Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.

   b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).

   c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.

   Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.

   d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f.

EXERCICE 2 (5 points)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on donne les points $A(0\,,0\,,2)$ $B(0\,,4\,,0)$ et $C(2\,,0\,,0)$.

On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Proposition 1 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{BC}=0$ est le plan (AIO) ».

Proposition 2 : « l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ est la sphère de diamètre [BC] ».

Proposition 3 : « le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 ».

Proposition 4 : « le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y+2z=4$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$ ».

Proposition 5 : « la droite (AG) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ ».

EXERCICE 3 (4 points)

On a posé à 1000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant.

Nombre de retards le 1er mois / Nombre de retards le 2ème mois	0	1	2 ou plus	*Total*
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.

   a) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois.

   b) Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul).

   On fait les hypothèses suivantes :

   - si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n + 1$ est 0,46.
   - si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n + 1$ est 0,66.
   - si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n + 1$ est encore 0,66.

   On note A_n l'événement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n »,
   B_n l'événement « l'individu a eu exactement un retard le mois n »,
   C_n l'événement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

   Les probabilités des événements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n, r_n.

   a) Pour le premier mois ($n = 1$), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

   b) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n et r_n .On pourra s'aider d'un arbre.

   c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,2\, p_n + 0,66$.

   d) Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,55$.
   Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

   e) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbf{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

On définit la fonction F sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie **A** est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$.
On appelle g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.

On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes sont tracées en annexe, page 7.

1. a) Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie **A**. On ne demande pas de justifier les limites.

   b) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

   a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbf{R}$ par $H(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbf{R}$.

   b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.

   On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
   Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

   c) Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4\mathrm{e}^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point P(x_P ; m) et la courbe (Γ) au point Q(x_Q ; m).

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P appartenant à l'intervalle $]-\infty, -1]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe, page 7) les points P et Q tels que $x_P \in]-\infty, -1]$ et PQ = 1.

b) Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q.
Justifier l'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$.

c) Déterminer la valeur de x_P telle que PQ = 1.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4