BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2009

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement de Spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.
Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite. Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.
On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

1. Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. a) Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.

   b) On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.

   Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.

3. Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à $0{,}8942$.

4. Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.
   Un lecteur MP3 est :
   - commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
   - détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
   - commercialisé sans le logo sinon.

   Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.
   Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

   On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

   a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

   b) Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G. Donner une interprétation de ce résultat.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct.

On supposera connu le résultat suivant :

Une application f du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbf{C} - \{0\}$ et $b \in \mathbf{C}$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.

On note A, B, C, D et E les points d'affixes respectives $z_A = 2\,i$, $z_B = 2$, $z_C = 4 + 6\,i$, $z_D = -1 + i$ et $z_E = -3 + 3i$.

1. Placer les points sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure des questions.

2. Déterminer la nature du triangle ABC.

3. Soit f la similitude plane directe telle que $f(A) = D$ et $f(B) = A$.

   a) Donner l'écriture complexe de f.

   b) Déterminer l'angle, le rapport et le centre Ω de cette similitude.

   c) Montrer que le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

   d) En déduire la nature du triangle DAE.

4. On désigne par (Γ_1) le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ_2) le cercle de diamètre $[AD]$.
   On note M le second point d'intersection du cercle (Γ_1) et de la droite (BC), et N le second point d'intersection du cercle (Γ_2) et de la droite (AE).

   a) Déterminer l'image de M par la similitude f.

   b) En déduire la nature du triangle ΩMN.

   c) Montrer que $MB \times NE = MC \times NA$.

EXERCICE 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(1,-1,3)$, $B(0,3,1)$, $C(6,-7,-1)$, $D(2,1,3)$, et $E(4,-6,2)$.

1. a) Montrer que le barycentre du système $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ est le point E.

b) En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$.

2. a) Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

b) Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b) Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée en annexe, page 6, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0,+\infty[$.

La courbe (C) passe par les points O et $A\left(1,\frac{1}{2e}\right)$ et, sur $[0,1]$, elle est au dessus du segment $[OA]$.

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2e}$.
2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la **Partie A** est définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x e^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.

   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

   b) En déduire les variations de f sur $[0,+\infty[$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx$.

   a) Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$, $0 \leqslant \frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.

   c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

ANNEXE

EXERCICE 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie.