BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement Obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On pose $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.

a) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.

b) Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$.

c) Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2i}$ soit un nombre réel strictement négatif.

2. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et Ω le point d'affixe $2 - i$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

b) Déterminer l'image Γ' de Γ par la rotation r. Déterminer une équation paramétrique de Γ'.

Exercice 2 (4 points)

Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue trois tirages successifs au hasard d'une boule selon la procédure suivante : après chaque tirage : si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des trois tirages.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

b) Calculer $P(X = 0)$.

c) On se propose de déterminer maintenant $P(X = 1)$.

- Montrer que la probabilité que la seule boule noire tirée soit obtenue au second tirage est égale à $\frac{8}{45}$.
- En remarquant que la seule boule noire peut être tirée soit au premier, soit au deuxième, soit au troisième tirage, calculer $P(X = 1)$.

2. On reprend l'urne dans sa composition initiale : 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher.
   Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   On effectue maintenant n tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon la même procédure : après chaque tirage, si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.
   Soit k un entier compris entre 1 et n.
   Soit N l'événement : « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont blanches ».
   Soit A l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ».
   Soit B l'événement : « on obtient une boule blanche dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages».
   Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(N)$.

Exercice 3 (7 points)

1. Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=\left(2x^3-4x^2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = 2x\left(-x^2+5x-4\right)\mathrm{e}^{-x}$.

   c) Dresser le tableau de variations de f.

   d) Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. (Unité graphique : 1 cm).

2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

   b) On admet que, pour tout n supérieur ou égal à 2, $I_n = n\,I_{n-1} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

   Déterminer I_2 et I_3.

   c) Soit A l'aire, exprimée en cm^2, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
   Calculer A.

3. Soit u une fonction définie et dérivable sur **R**.

On définit la fonction v sur $]0\,,+\infty[$ par $v(x)=u\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a) On suppose que u est croissante sur l'intervalle $[a\,,b]$ (où $0 < a < b$).
   Déterminer le sens de variation de v sur $\left[\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a}\right]$.

   b) On définit maintenant la fonction g par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $]\,0\,,+\infty[$, où f est la fonction définie dans la question 1.
   Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

   c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).

Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$.

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t et soit A le point de coordonnées $(-9, -4, -1)$.
   a) Vérifier que A n'appartient ni à (P_1), ni à (P_2).
   b) Exprimer AM^2 en fonction de t.
   c) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.
   - Étudier les variations de f.
   - Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?

   Dans la suite, on désignera ce point par I.
   - Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.
   a) Déterminer une équation de (Q).
   b) Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).