BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2007

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 4 heures – Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition du candidat.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.**

EXERCICE 1 (7 points)

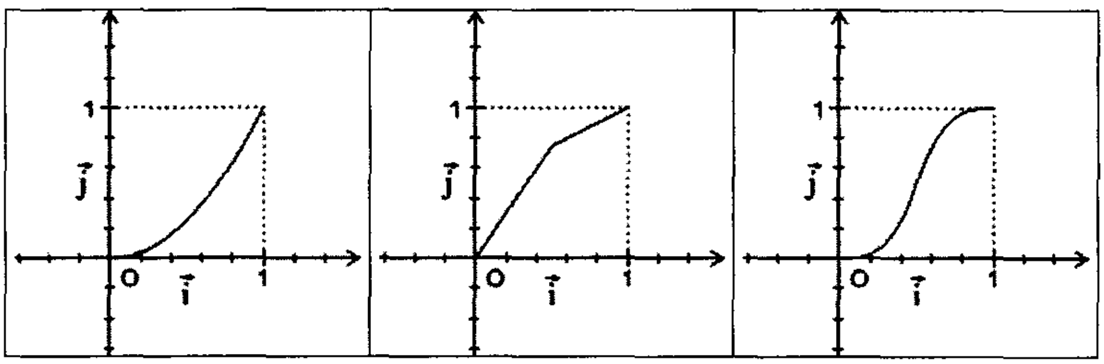
On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0,1]$ et vérifiant les conditions (P_1), (P_2) et (P_3) suivantes :

- (P_1) : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$.
- (P_2) : $f(0)=0$ et $f(1)=1$.
- (P_3) : pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $f(x)\leq x$.

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ du plan, on note (C) la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y=x$.

À toute fonction f de (E), on associe le nombre réel $I_f=\int_0^1 [x-f(x)]\,\mathrm{d}x$.

1. a) Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E).
   La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



Courbe n° 1 *Courbe n° 2* *Courbe n° 3*

   b) Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f\geq 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $h(x)=2^x-1$.
   (On rappelle que, pour tout x réel, $2^x=e^{x\ln 2}$).
   a) Montrer que la fonction h vérifie les conditions (P_1) et (P_2).
   b) Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $\varphi(x)=2^x-x-1$.
   Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, $\varphi(x)\leq 0$. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ sur $[0,1]$).
   En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).
   c) Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $P(x)=a x^2 + b x + c$ où a, b et c sont trois nombres réels tels que $0 < a < 1$.
On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P = I_h$.

a) Montrer que la fonction P vérifie la propriété (P_2) si et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle $[0,1]$, $P(x)=a x^2 + (1-a)x$.

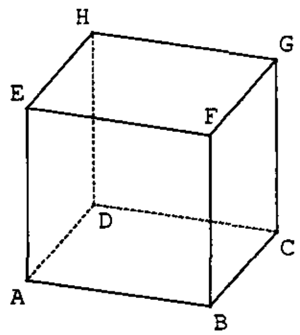
Montrer que toute fonction P définie sur $[0,1]$ par $P(x)=a x^2 + (1-a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

b) Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P.

c) Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$.
Quelle est cette valeur ?

EXERCICE 2 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $\left(D;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1. a) Donner les coordonnées des points A, C et E.

   b) Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C;2),(E;1)\}$.

   c) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2. Soit $(a\,,\,b)$ un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN}=b\overrightarrow{DL}$.

   a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple $(a\,,\,b)$ vérifie le système $\begin{cases}-a+2b=1\\3a-b=0\end{cases}$

   b) En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

   c) Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

EXERCICE 3 (4 points)

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40% sont de type A, 41% de type B et 19% de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

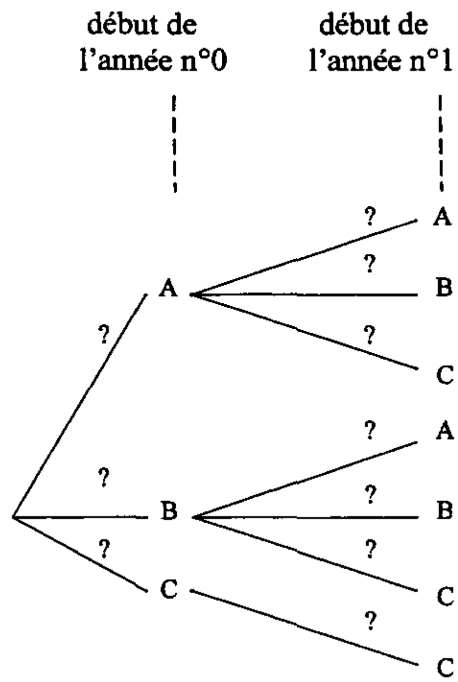
Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n-ième année est de type C ».

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.

Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n°0) on pose :
$p_0 = 0{,}40$, $q_0 = 0{,}41$ et $r_0 = 0{,}19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



2. a) Montrer que $p_1 = 0{,}363$ puis calculer q_1 et r_1.

   b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul,
   $$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3q_n \\ q_{n+1} = 0{,}3p_n + 0{,}6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur N par
   $S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$.

   a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

   b) Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

   c) En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n).
   Interpréter le résultat.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies sur la feuille jointe en annexe page 7. Cette feuille ne sera pas remise avec la copie.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.
On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O, de rapport λ et d'angle θ.
Soit :

- les points A' et B', images respectives des points A et B par la similitude σ ;
- les points I, milieu du segment [A'B] et J, milieu du segment [AB'] ;
- le point M milieu du segment [AA'] ;
- le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) et le point H' image du point H par la similitude σ.

Partie A. Étude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6+4i$, le point B a pour affixe $2+4i$, et le point H, projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), a donc pour affixe $4i$.
La similitude σ est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A', B' et H'.

2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').

Partie B. Étude du cas général

1. a) Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite (A'B').

   b) Montrer que $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On admet que $\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

   c) En déduire que $\frac{MJ}{MI}=\frac{OH'}{OH}$ et que $\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MJ}\right)=\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OH'}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H.
   On note K l'image du point J par la similitude s.

   a) Montrer que OK = OH', puis que $\left(\overrightarrow{OK},\overrightarrow{OH'}\right)=0+k\times 2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

   b) En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude s.

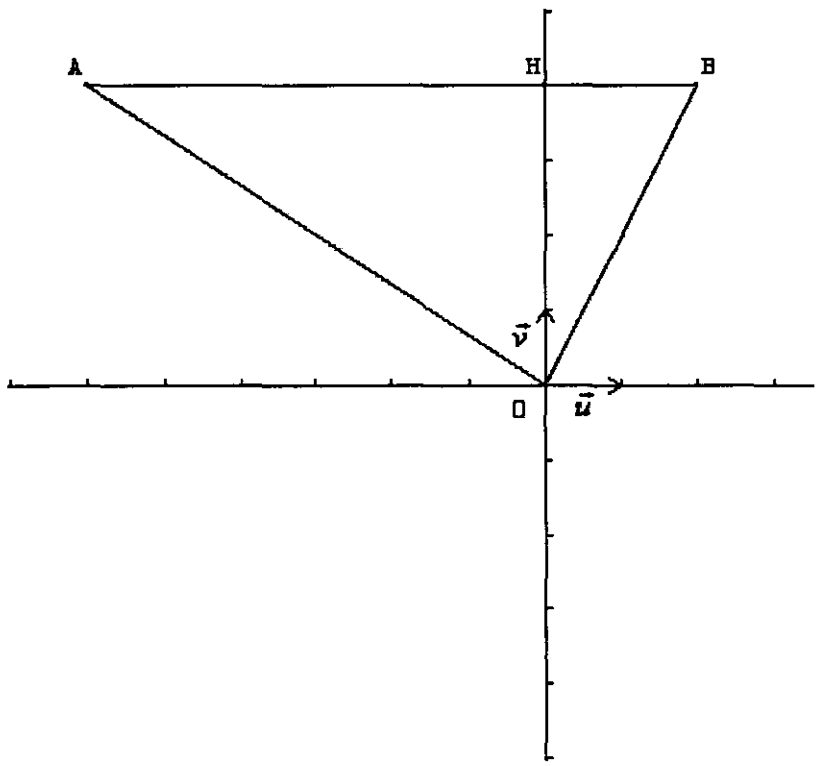
3. Montrer que $\left(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{HH'}\right)=\left(\overrightarrow{MI},\overrightarrow{OH}\right)+k\times 2\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

   Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH').

ANNEXE

Cette page ne sera pas à remettre avec la copie.

Partie A



Partie B