EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1) a) Déterminer les limites de la fonction f en 1 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de la fonction f.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

a) On a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur la **figure donnée en annexe qui sera rendue avec la copie**. Construire la droite d'équation $y=x$ et les points M_1 et M_2 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives u_1 et u_2. Proposer une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant \mathrm{e}$ (on pourra utiliser la question **1b)**).

c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ de l'intervalle $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

Partie B

On rappelle que la fonction f est continue sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

1) En étudiant de deux manières la limite de la suite $(f(u_n))$, démontrer que $f(\ell)=\ell$.

2) En déduire la valeur de ℓ.

EXERCICE 2 (6 points)

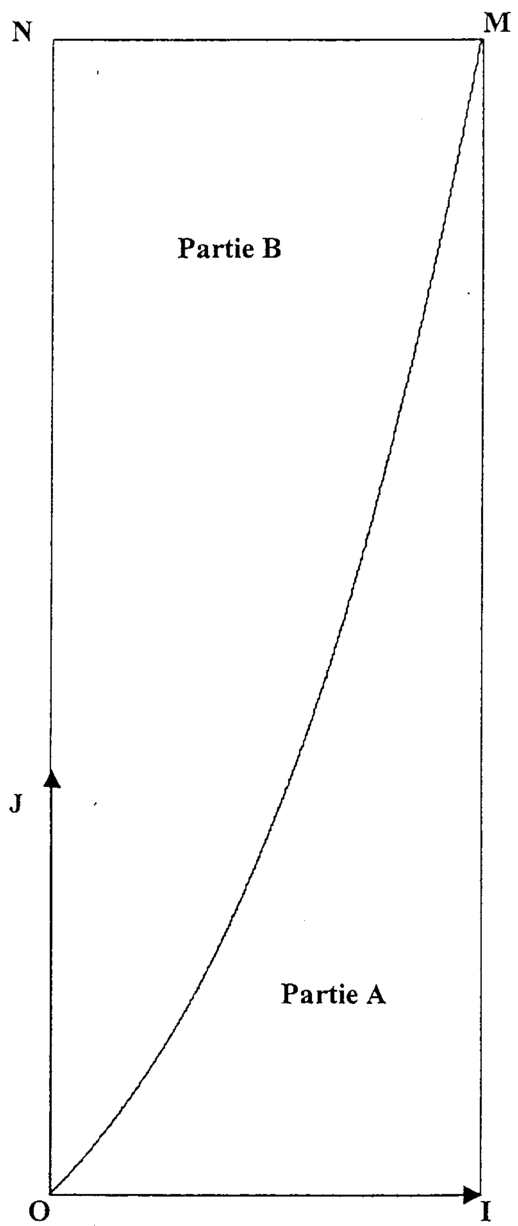
Commun à tous les candidats

Première partie

Calculer l'intégrale $\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

Deuxième partie

La figure ci-dessous représente une cible rectangulaire OIMN telle que, dans le repère orthonormal $(O ; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, la ligne courbe $\mathscr{C}$ reliant le point O au point M est une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$. Cette courbe $\mathscr{C}$ partage la cible OIMN en deux parties A et B comme l'indique la figure ci-dessous.
Un jeu consiste à lancer une fléchette qui atteint soit l'extérieur de la cible, soit l'une des parties A ou B. On admet que la fléchette ne peut atteindre aucune des frontières de la cible, ni la courbe $\mathscr{C}$.



Une étude statistique a montré que la fléchette tombe à l'extérieur de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'atteindre les parties A et B sont proportionnelles à leurs aires respectives.

1) Démontrer que la probabilité d'atteindre la partie A est égale à $\frac{1}{2e}$. Quelle est la probabilité d'atteindre la partie B ?

2) On lance de manière indépendante trois fléchettes.

a) Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fléchettes ayant atteint la partie A. Définir la loi de probabilité de X. En déduire la valeur exacte de son espérance mathématique.

b) Soit E l'événement : « Exactement deux fléchettes atteignent la partie A ». Calculer une valeur approchée au millième de la probabilité de E.

c) Soit F l'événement : « les trois fléchettes atteignent la partie B ». Calculer la probabilité de F (on donnera la valeur exacte).

Sachant qu'aucune fléchette n'a atteint l'extérieur de la cible, quelle est la probabilité que toutes les trois se trouvent dans la partie B ?

3) On lance cette fois de manière indépendante n fléchettes.

a) Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une des fléchettes atteigne la partie A.

b) Déterminer le plus petit naturel n tel que $p_n \geqslant 0,99$.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm.
On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\dfrac{\pi}{2}$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

1) Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation $\dfrac{z-4}{z} = \mathrm{i}$. Écrire la solution sous forme algébrique.

2) Résoudre dans **C** l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Écrire les solutions sous forme exponentielle.

3) Soient A, B, A′ et D les points du plan complexe d'affixes respectives :

$$a = 2, \quad b = 4, \quad a' = 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad d = 2 + 2\mathrm{i}.$$

Quelle est la nature du triangle ODB ?

4) Soient E et F les points d'affixes respectives $e = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $f = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
Quelle est la nature du quadrilatère OEAF ?

5) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre A′et de rayon 2.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

a) On désigne par E′ l'image par la rotation r du point E. Calculer l'affixe e' du point E′.

b) Démontrer que le point E′ est un point du cercle $\mathscr{C}'$.

c) Vérifier que : $e - d = (\sqrt{3} + 2)(e' - d)$. En déduire que les points E, E′ et D sont alignés.

6) Soit D′ l'image du point D par la rotation r. Démontrer que le triangle EE′D′ est rectangle.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On complètera la figure donnée en annexe 2 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].

On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s.
Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.

2) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI] . Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ] . Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.

3) Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.

4) On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).

a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b) Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0 , 2 , $2 + 2i$ et $2i$.

1) Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.

2) Calculer l'affixe du point Ω.

3) Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

EXERCICE 4 **(4 points)**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions **1, 2, 3** *et* **4**, ***parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et les deux affirmations qu'il pense exactes. Aucune justification n'est demandée.*
Les quatre questions sont indépendantes et sont notées sur 1 point.
Toute réponse juste rapporte 0,5 point.
Donner plus de 2 réponses à une question entraîne la nullité de la question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Soit P le plan d'équation $2x + 3y + 4z - 1 = 0$.

a) La distance du point O au plan P est égale à 1.

b) La distance du point O au plan P est égale à $\frac{1}{\sqrt{29}}$.

c) Le vecteur $\vec{n}\,(1, \frac{3}{2}, 2)$ est un vecteur normal au plan P.

d) Le plan Q d'équation $-5x + 2y + z = 0$ est parallèle au plan P.

2) On désigne par P le plan d'équation $2x + y - z = 0$, et par D la droite passant par le point A(1, 1, 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1, -4, -2)$.

a) La droite D est parallèle au plan P.

b) La droite D est orthogonale au plan P.

c) La droite D est sécante avec le plan P.

d) Un système d'équations paramétriques de D est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbf{R})$.

3) On désigne par E l'ensemble des points M (x, y, z) tels que : $x + y + z = 3$ et $2x - z = 1$.
Soit le point A (1, 1, 1).

a) L'ensemble E contient un seul point, le point A.

b) L'ensemble E est une droite passant par A.

c) L'ensemble E est un plan passant par A.

d) L'ensemble E est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,(1, -3, 2)$.

4) ABCD est un tétraèdre quelconque. Soit P le plan passant par A et orthogonal à la droite (BC).

a) Le plan P contient toujours le point D.

b) Le plan P contient toujours la hauteur (AH) du triangle ABC.

c) Le plan P est toujours l'ensemble des points M de l'espace tels que :

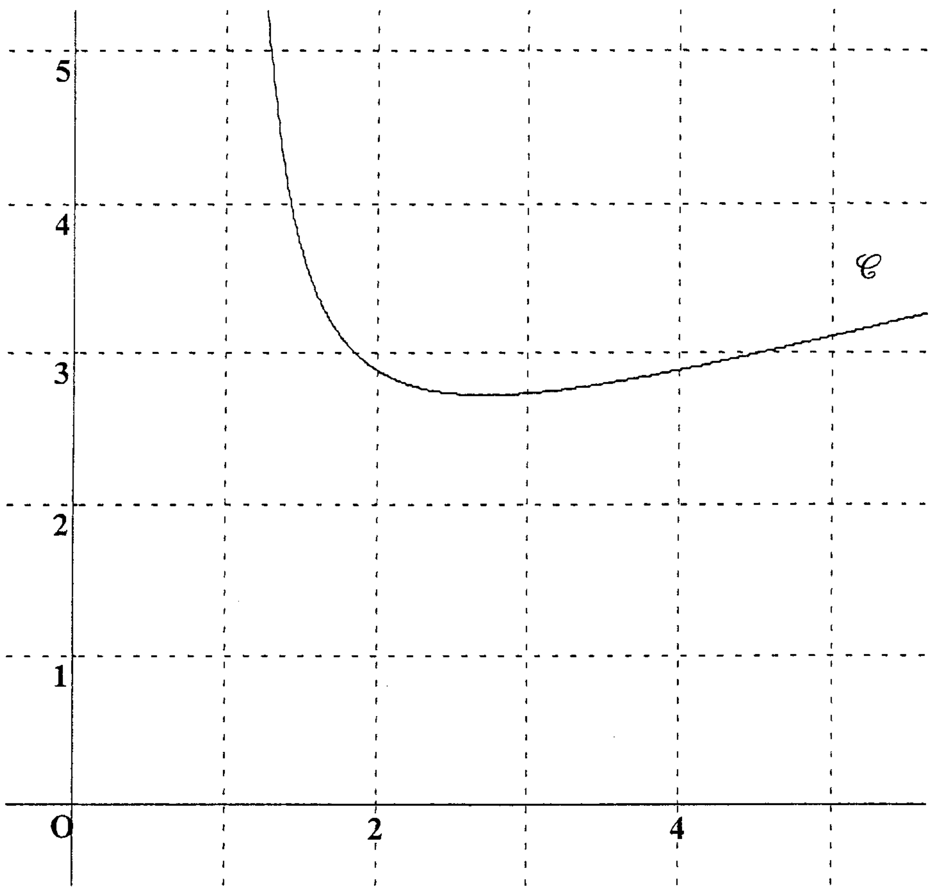
$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}.$$

d) Le plan P est toujours le plan médiateur du segment [BC].

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie.

Figure de l'exercice 1



ANNEXE 2

À compléter et à rendre avec la copie.

Figure de l'exercice 3