

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2007

MATHÉMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ*Durée de l'épreuve : 4 heures**Coefficient : 9*

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

EXERCICE 1 (5 points)*Commun à tous les candidats*

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la

fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

- 1) a) Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ .
 b) Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées.
 Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T); la réaliser sur la figure *en annexe 1*.

2) Restitution organisée de connaissances

On suppose connue la propriété :

Pour tout couple $(x; y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln(\sqrt{m}) = \frac{1}{2} \ln(m)$

- 3) Utiliser le résultat de la question 2) pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse \sqrt{ab} .
 Expliquer la construction et la réaliser sur la figure de *l'annexe 1* (on laissera les traits de construction apparents).

EXERCICE 2 (4 points)*Commun à tous les candidats*

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n.$$

- 1) Étudier la monotonie de la suite u .
- 2) a) Soit h la fonction définie sur \mathbf{R} par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variation de la fonction h .
 En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1 ; 0 [$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $] -1 ; 0 [$.
 b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.
- 3) Étudier la convergence de la suite u . Déterminer, si elle existe, sa limite.

EXERCICE 3 (6 points)*Commun à tous les candidats*

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Établir que, pour tout nombre réel x non nul, on a $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Donner, sans démontrer, la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ et démontrer que f est continue en 0.

3) a) Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a : $e^x \geq x + 1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre

réel x non nul, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

c) Donner le tableau des variations de f .

4) Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ de la courbe \mathcal{C} .

a) Établir que $f(-x) = \frac{x}{e^x - 1}$ puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM') .

b) On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, désignent les points d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 3i$ et $c = 2i$.

1) a) Écrire b sous forme exponentielle.

b) Les points A et C sont représentés sur la figure jointe *en annexe 2*. Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (*laisser les traces de construction apparentes*).

c) Déterminer une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ et de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AC})$.

2) Les points E et F ont pour affixes respectives $e = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ et $f = -\sqrt{3} - i$.

a) Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés.

b) Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire $k i$ où k est un nombre réel à déterminer.

Interpréter géométriquement ce résultat. On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k' i$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c) Placer les points E et F sur la figure.

3) On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est $z \mapsto \frac{1}{2}\bar{z} - \sqrt{3}$.

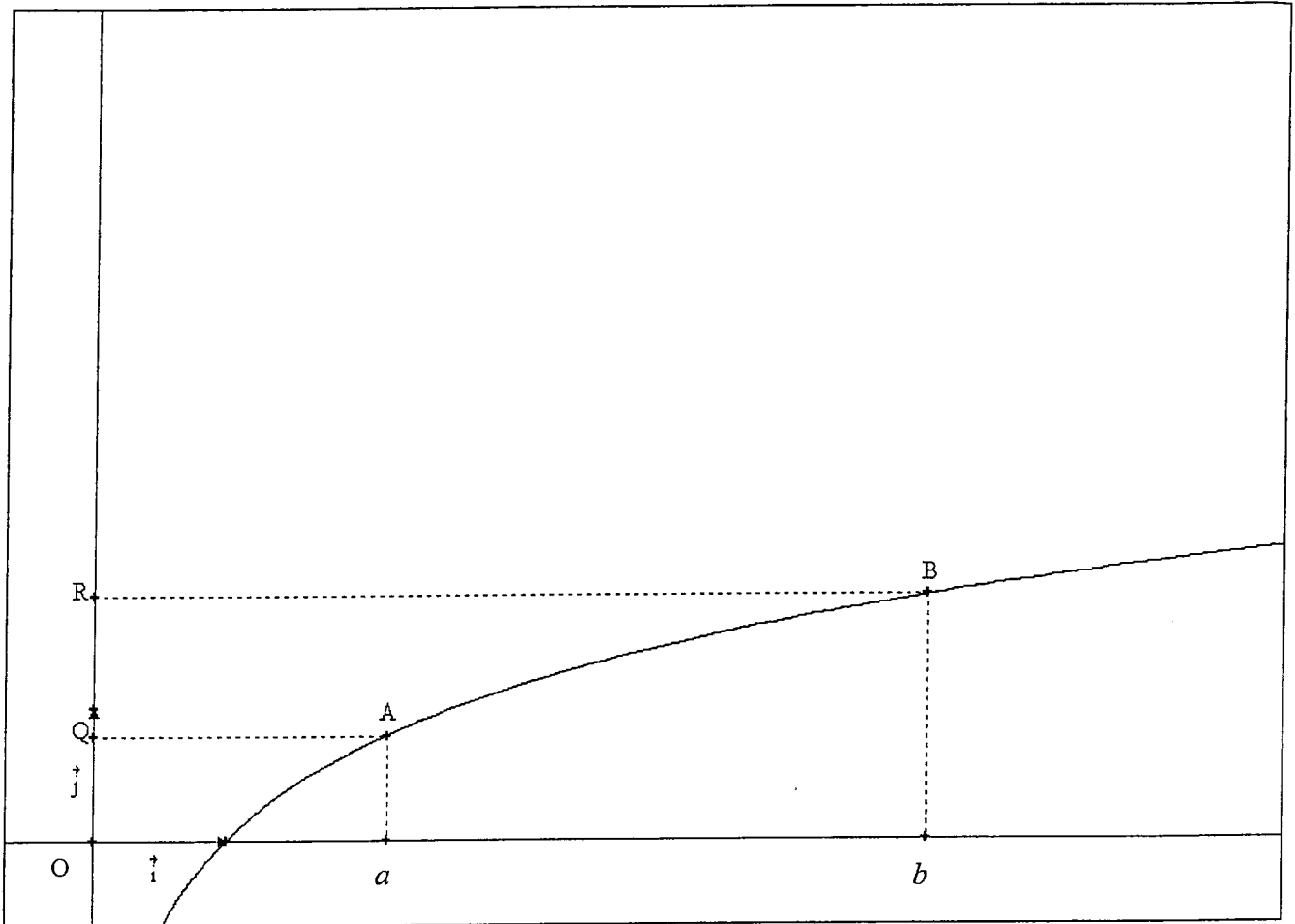
Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4) Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point S(H) sur la figure.

ANNEXE 1

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 1



ANNEXE 2

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 4

