EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Soient F le point de coordonnées $\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z=-\dfrac{1}{4}$.

On note $d(M,P)$ la distance d'un point M au plan P.
Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ qui vérifient $d(M,P)=MF$ a pour équation $x^2+y^2=z$.

2) a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z=2$?

b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x=0$?
Représenter cette intersection dans le repère $\left(O\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

3) Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?

b) Démontrer que 7 divise x^2+y^2 si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z=98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.