BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I. **SUJET SORT**

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SESSION 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes **C** l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$.

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument de z_A et z_B.

b) Donner la forme exponentielle de z_A.

c) Placer les points A et B dans le plan muni du repère $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

a) Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.

b) On nomme C l'image du point A par la transformation R.
Déterminer la forme exponentielle de l'affixe z_C du point C. En déduire sa forme algébrique.

c) Placer le point C.

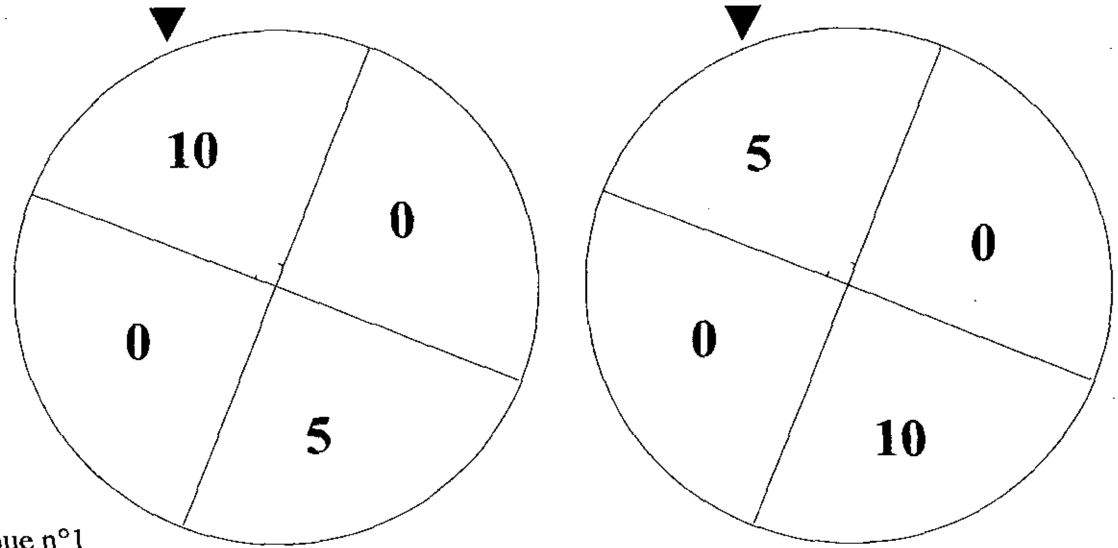
d) Montrer que le point B est l'image du point C par la transformation R.

4. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 2 : (4 points)

Pour la fête de l'école, une association propose une loterie selon le principe suivant :
- Le joueur mise 10 euros.
- Il fait tourner deux roues identiques chacune s'arrêtant devant un repère. Chaque roue est divisée en quatre quartiers sur lesquels sont indiqués les gains en euros : 10 ; 0 ; 5 ; 0.

Tous les quartiers ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
La gain obtenu par le joueur est égal à la somme des gains indiqués sur les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues.



Roue n°1

Roue n°2

Dans l'exemple ci-dessus, la partie assure au joueur un gain de 15 €.

1. Étude du gain d'un joueur pour une mise de 10 euros.

On nomme G la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain du joueur en euros.

a) Reproduire et compléter le tableau suivant donnant les valeurs prises par la variable aléatoire G selon les quartiers sur lesquels se sont arrêtées les roues :

Roue n°1 / Roue n°2	10	0	5	0
10				
0				
5				
0				

b) Prouver que la probabilité que le joueur obtienne un gain supérieur ou égal à sa mise est 50 %.

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

d) Calculer la probabilité, notée $p(\mathrm{G}>10)$, qu'un joueur obtienne un gain strictement supérieur à sa mise.

e) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire G, puis donner son interprétation.

2. Étude du bénéfice de l'association pour une mise de *m* euros.

On suppose dans cette question que la mise du joueur est *m* euros.
On note B la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice (positif ou négatif) réalisé par l'association, c'est-à-dire la différence entre la mise qu'elle a encaissée et le gain éventuel qu'elle a reversé au joueur.

a) Exprimer en fonction de *m* l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

b) Déterminer *m* pour que l'espérance de bénéfice de l'association soit d'au moins 5 €.

PROBLÈME (11 points)

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle $(\mathrm{E}): y' + y = -x - 1$; où y désigne une fonction de la variable x, définie et dérivable sur l'ensemble des réels **R**.

1. **a)** Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   b) Déterminer la solution h de cette équation différentielle $y' + y = 0$ prenant la valeur $\frac{1}{\mathrm{e}}$ en $x = 1$.

2. Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur **R** par $u(x) = \mathrm{e}^{-x} + a\,x$ soit solution de l'équation différentielle (E).

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire *f*

La fonction f est définie sur **R** par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. Calculer, pour tout réel x, $f'(x)$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.
4. Préciser le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie C : Calcul de l'aire d'une partie du plan

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est tracée sur la feuille jointe en annexe, qui est à rendre avec la copie.

1. Dans le demi-plan constitué des points d'abscisses positives, hachurer la partie $\mathscr{D}$ limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
2. Calculer en fonction de α la mesure, en unités d'aire, de l'aire de la partie $\mathscr{D}$ du plan.

Partie D : Étude d'une fonction g et représentation graphique

La fonction g est définie sur $]-\infty\ ;\alpha[$ par : $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}-x}$ (où α désigne le nombre réel trouvé à la partie B) et on note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. **a)** Vérifier que, pour tout $x\in\ ]-\infty\ ;\alpha[\ ;\ g(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{1-x\mathrm{e}^{x}}$.

   b) En déduire la limite de la fonction g en $-\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.

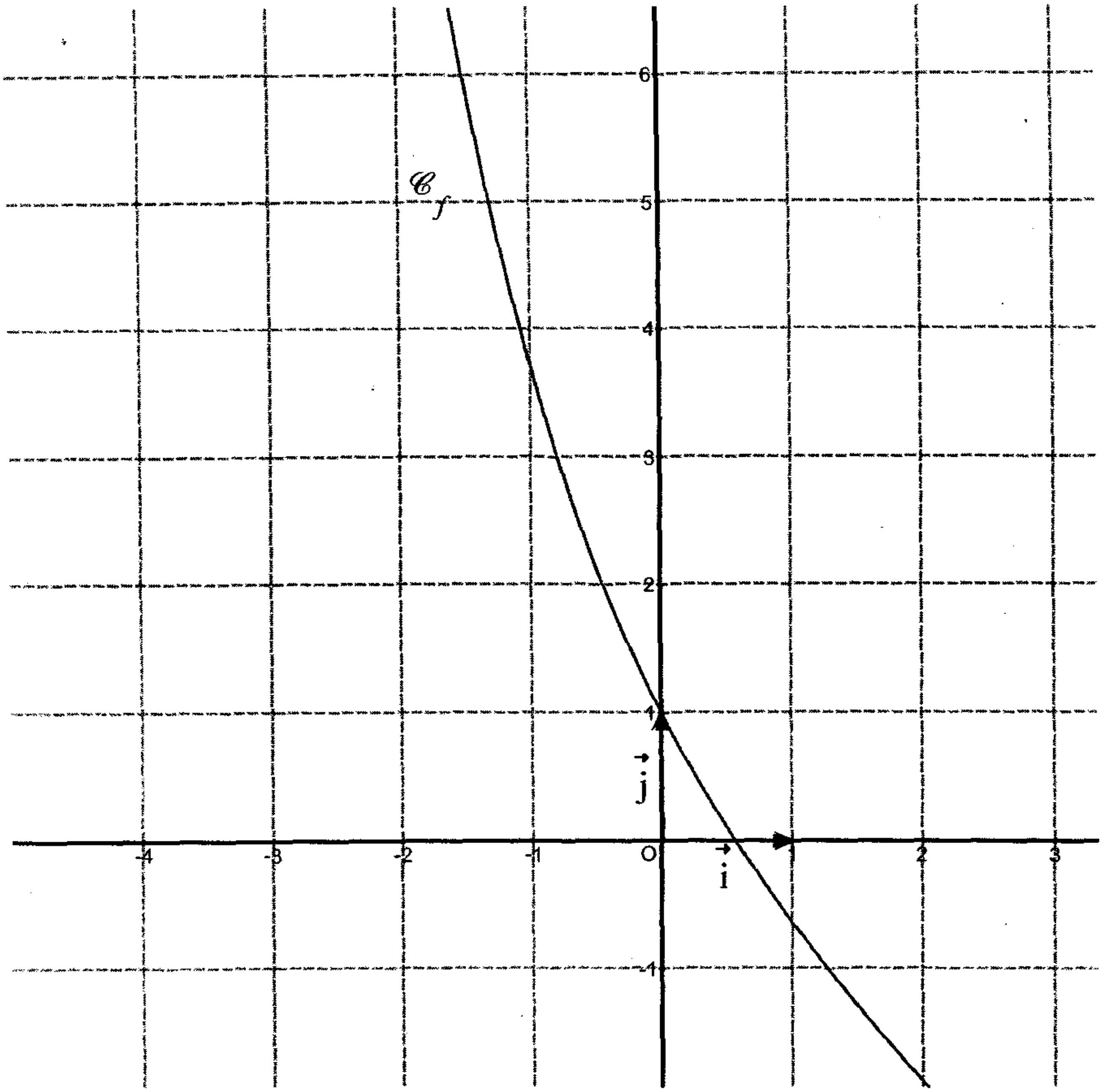
2. En utilisant les résultats trouvés dans la partie B question 4, déterminer la limite de la fonction g en α.
   Interpréter graphiquement cette limite.

3. **a)** La fonction g' désignant la dérivée de la fonction g, montrer que pour tout x de $]-\infty\ ;\alpha[$, $g'(x)=\dfrac{e^{-x}(1+x)}{\left(e^{-x}-x\right)^2}$.

   b) En déduire les variations de la fonction g sur $]-\infty\ ;\alpha[$ et dresser le tableau des variations de la fonction g.

4. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le repère figurant sur la feuille annexe à remettre avec la copie.

FEUILLE ANNEXE À REMETTRE AVEC LA COPIE



BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

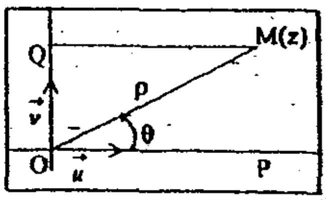
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad ; \quad y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$|z| - |z'| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

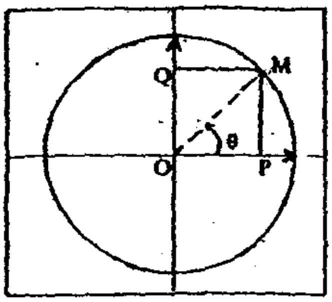
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \; ; \; a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\,;\; \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)\ ;\ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}\ ;\quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

STI STL 2

III. ANALYSE

A PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leqslant b$ et $m \leqslant f \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$