SUJET SORTI

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SESSION 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT
LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera distribuée en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A.

b) Écrire le nombre complexe z_A sous la forme $re^{i\theta}$ où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π.

c) Placer le point A dans le repère $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ en prenant comme unité graphique 2 cm.

2. Soit B l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On appelle z_B l'affixe du point B.

a) Déterminer l'écriture du nombre complexe z_B sous la forme $re^{i\theta}$ (où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π).

b) Écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.

c) Placer le point B dans le repère $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

3. Montrer que le triangle AOB est équilatéral.

4. Soit C le point d'affixe $z_C = z_A e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Par quelle transformation géométrique le point C est-il l'image du point A ? Préciser les éléments caractéristiques de cette transformation.

b) Placer le point C dans le repère $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

c) Écrire le nombre complexe z_C sous forme trigonométrique.

d) Établir que $z_C = z_A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En déduire l'écriture du nombre complexe z_C sous forme algébrique.

e) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 2 : (5 points)

On propose à un candidat au baccalauréat un exercice qui comporte trois questions auxquelles il doit répondre par vrai ou faux.
Une bonne réponse rapporte 2 points, une mauvaise réponse enlève 1 point, l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.
On appelle

- A l'évènement : « le candidat n'a pas répondu à la question » ;
- B l'événement : « le candidat a donné la bonne réponse à la question » ;
- C l'événement : « le candidat a donné la mauvaise réponse à la question ».

Si, par exemple, le candidat a donné les bonnes réponses aux questions 1 et 2, et la mauvaise réponse à la question 3, le résultat obtenu se note (B, B, C).

Un candidat qui ne sait répondre à aucune question hésite entre deux stratégies :

- soit il répond au hasard aux trois questions ;
- soit il décide de ne pas répondre à une question, par exemple la première, et répond au hasard aux deux autres questions.

I **<u>Première stratégie</u>** : le candidat choisit de ne pas laisser de questions sans réponse. Il répond donc au hasard et de façon équiprobable aux trois questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir ? (On pourra utiliser un arbre.)
2. Calculer la probabilité que le candidat n'ait fait aucune faute.
3. Montrer que la probabilité que le candidat ait fait une faute et une seule, est égale à 0,375.
4. On note X la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

II **<u>Deuxième stratégie</u>** : le candidat choisit de ne pas répondre à la première question, et répond au hasard et de façon équiprobable aux deux autres questions.

1. Combien de triplets différents peut-on obtenir ?
2. On note Y la variable aléatoire qui à chaque triplet associe la note obtenue à l'exercice.
   a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.
   b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
   c) Calculer l'espérance mathématique E(Y) de la variable aléatoire Y.

III **<u>Comparaison des stratégies</u>** : parmi les deux stratégies, quelle est la plus favorable au candidat ?

PROBLÈME : (10 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'ensemble des réels **R**.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = 2e^x + 2x + 3$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction g sur **R**.
Les limites ne sont pas demandées.

2. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2;-1]$.

b) Donner l'arrondi au dixième de α.

c) En déduire, selon les valeurs du nombre réel x, le signe de $g(x)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2e^x + x^2 + 3x$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

3. Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 3x$.

a) Déterminer la limite de $f(x) - \left(x^2 + 3x\right)$ quand x tend vers $-\infty$.

b) Que peut-on en déduire graphiquement ?

c) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la parabole $\mathscr{P}$.

4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

b) En utilisant la question 2. c) de la partie **A**, dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

6. Sur la feuille annexe jointe, **à rendre avec la copie**, on a représenté la parabole $\mathscr{P}$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, en prenant comme unité graphique 2 cm.
Tracer sur cette feuille annexe la tangente T et la courbe $\mathscr{C}$.

Partie C : Calcul d'aire

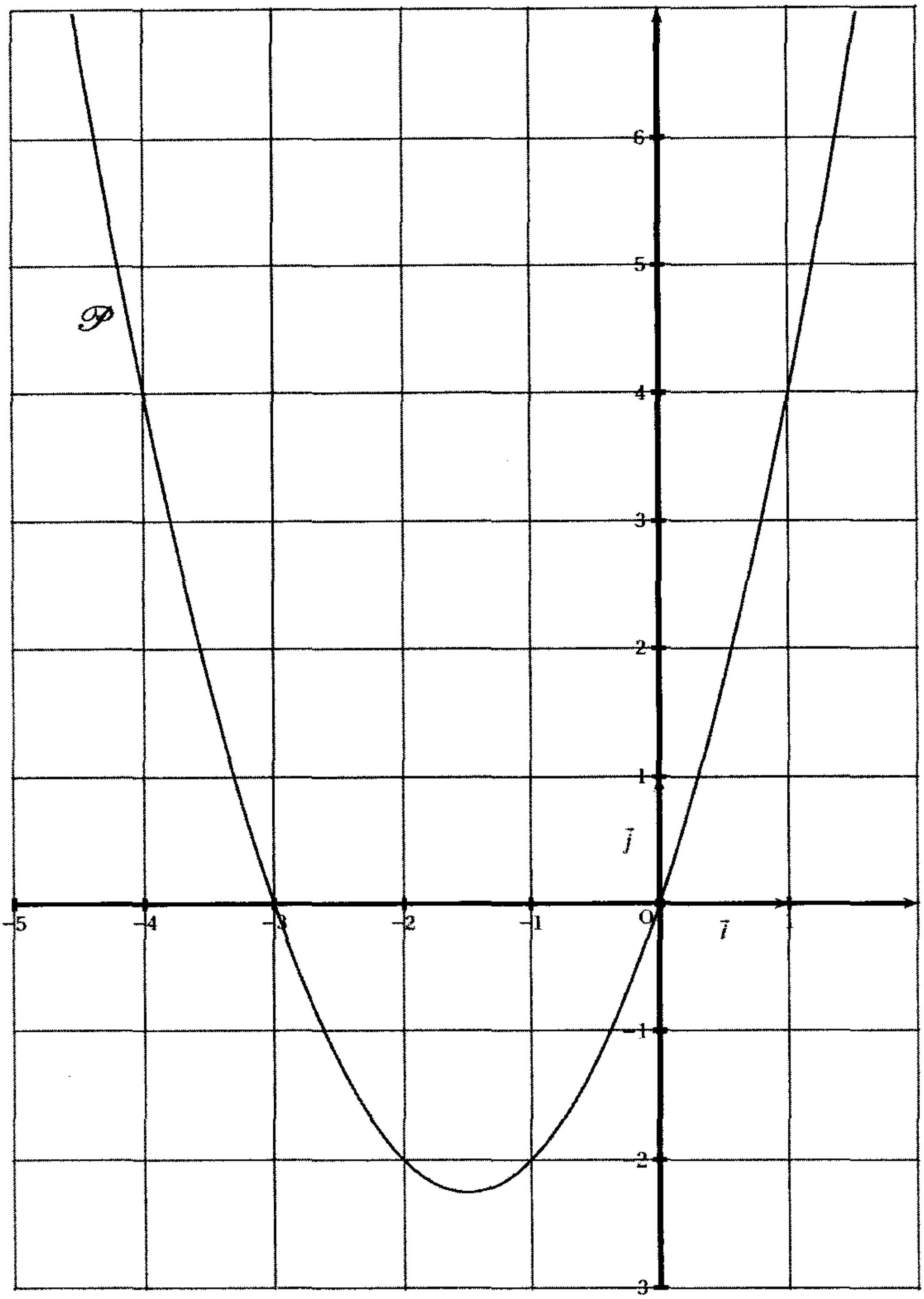
1. Hachurer sur la feuille annexe la partie du plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

2. **a)** Calculer la mesure exacte, en unités d'aire, de l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan hachurée précédemment.

b) En déduire, en cm^2, la mesure arrondie au centième de l'aire $\mathscr{A}$.

ANNEXE

Cette feuille est à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

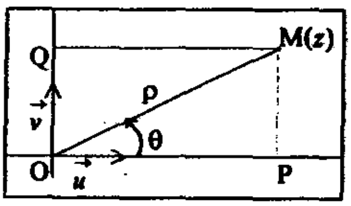
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z| - |z'|\right| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*
(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

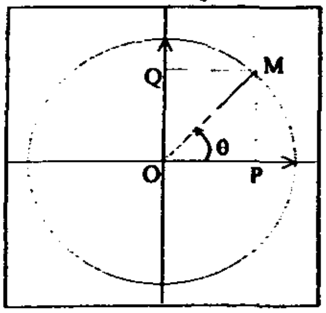
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ; \ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
  $$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
  $$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
  $$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

STi STL2

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites **(SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)**

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

STI STL 3

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$