L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire N° 99-186 du 16 Novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

****

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES 2 EXERCICES ET LE PROBLEME

EXERCICE 1 : (5 points)

1. Dans l'ensemble **C** des nombres complexes, résoudre l'équation d'inconnue z : $2z^2+10z+25=0$. Ecrire les solutions de cette équation sous la forme $r\,e^{i\theta}$ où r est un nombre réel positif et θ un nombre réel.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère le point A d'affixe $z_A=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$, le point B d'affixe $z_B=-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i$ et le point C d'affixe $z_C=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Calculer le module de z_A-z_B et celui de z_B-z_C. En déduire la nature du triangle ABC.

3. On appelle A' et B' les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{12}$ et on note $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives de A' et B'.

a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes $z_{A'}$ et $z_{B'}$.

b) Ecrire les nombres complexes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ sous forme algébrique.

c) Placer les points A' et B' dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On expliquera la construction géométrique.

EXERCICE 2 : (4 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \frac{1}{4}y = 0$, y désignant une fonction numérique définie sur l'ensemble **R** des nombres réels.

2. Déterminer la fonction f, solution de l'équation précédente, qui vérifie : $f(0) = 2$ et $f'(0) = \sqrt{3}$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = 4 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$.

4. **a)** En utilisant l'équation différentielle (E), expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f'', dérivée seconde de f, à partir de celle de f.

   b) Sur la feuille annexe est tracée la représentation graphique de f sur l'intervalle $[0 ; 4\pi]$. Tracer la représentation de f'' sur ce même graphique et sur ce même intervalle.

PROBLEME : (11 points)

PARTIE A

On considère la fonction h définie sur **R** par $h(x) = x + 1 - e^{x}$.

1. Déterminer la dérivée h' de h.

2. Résoudre dans **R** l'équation $1 - e^{x} = 0$ et l'inéquation $1 - e^{x} > 0$. En déduire le sens de variation de la fonction h.

3. Calculer $h(0)$. Dresser le tableau de variations de h (on ne calculera pas les limites aux bornes de l'ensemble de définition).

4. Justifier que, pour tout nombre réel x, $h(x) \leq 0$.

PARTIE B.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (-2x^2 - x + 1)e^{-x}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. En remarquant que, pour tout nombre réel x différent de 0, on a $f(x) = (-2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})x^2 e^{-x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. **a)** Soit f' la dérivée de f. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (2x^2 - 3x - 2)e^{-x}$.

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous. On donnera les valeurs arrondies au centième.

x	$-1,3$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3	4	6
$f(x)$										

5. On appelle A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

a) Donner une équation de $\mathscr{T}$; on l'écrira sous la forme $y = g(x)$ où g est une fonction définie sur **R**.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = (1-2x)h(x)e^{-x}$, h étant la fonction étudiée dans la partie A.

c) Etudier, suivant les valeurs du nombre réel x, le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.

6. Tracer $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

7. **a)** Déterminer des nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur **R** par $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction f.

b) Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.