

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SUJET SORT

SESSION 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures

**LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT
LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME**

* * * *

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.

Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.

En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.

Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.

(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Deux feuilles de papier millimétré seront distribuées en même temps que le sujet.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE			
Coefficient : 4	SESSION 2007	Durée : 4 heures	
SÉRIE : STI GÉNIE ÉLECTRONIQUE – GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE – GÉNIE OPTIQUE		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
7MAI3ME1	Ce sujet comporte 6 pages	Page 1/6	

EXERCICE 1 : (6 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation $z^2 + 4z + 16 = 0$.

2. Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^3 - 64$.

a) Calculer $P(4)$.

b) Trouver les réels a , b et c tels que, pour tout nombre complexe z ,
 $P(z) = (z - 4)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

3. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$, $z_B = \bar{z}_A$ et $z_C = 4$.

a) Établir que $z_A = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Écrire z_B sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif et θ un nombre réel compris entre $-\pi$ et π .

b) Placer les points A, B et C dans le plan muni du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

4. On appelle D l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$, et on appelle z_D l'affixe du point D.

a) Déterminer le module et un argument de z_D .

b) En déduire la forme algébrique de z_D .

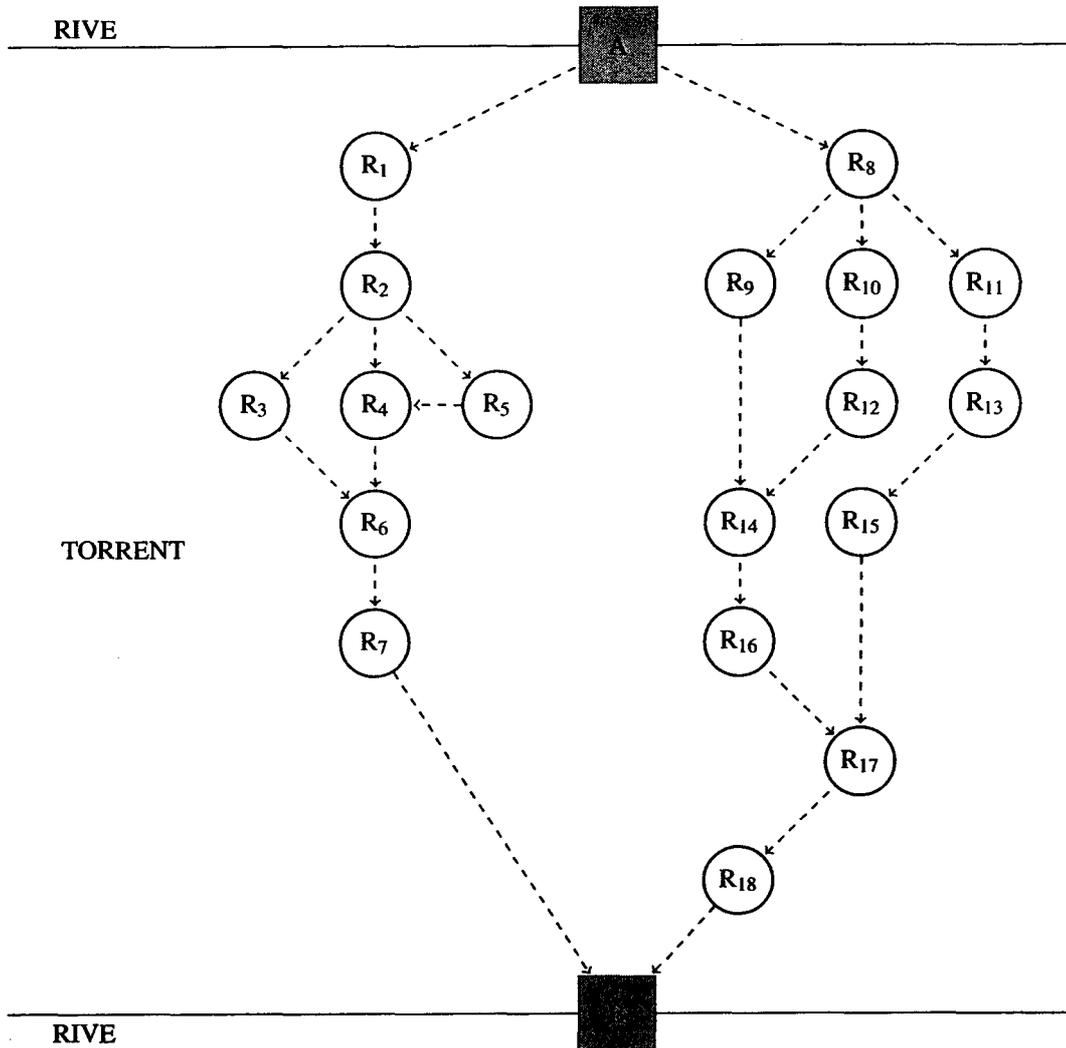
c) Placer le point D sur le graphique précédent.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE		
Coefficient : 4	SESSION 2007	Durée : 4 heures
SÉRIE : STI GÉNIE ÉLECTRONIQUE – GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE – GÉNIE OPTIQUE		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
7MAI3ME1	Ce sujet comporte 6 pages	Page 2/6

EXERCICE 2 : (4 points)

Le personnage virtuel d'un jeu électronique doit franchir un torrent en sautant de rocher en rocher.

Le torrent se présente de la manière suivante (les disques $R_1, R_2, \dots, R_{17}, R_{18}$ représentent les rochers) :



Le personnage virtuel part de A pour aller en B. Il ne peut choisir que les trajets matérialisés par des pointillés et avancer uniquement dans le sens des flèches.

On appelle « parcours » une suite ordonnée de lettres représentant un trajet possible.

Par exemple : $AR_1R_2R_3R_6R_7B$ est un parcours qui nécessite 6 bonds.

Toute probabilité demandée sera donnée sous forme de fraction.

1. Déterminer les six parcours possibles.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE		
Coefficient : 4	SESSION 2007	Durée : 4 heures
SÉRIE : STI GÉNIE ÉLECTRONIQUE – GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE – GÉNIE OPTIQUE		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
7MAI3ME1	Ce sujet comporte 6 pages	Page 3/6

2. Le joueur choisit au hasard un parcours. On admet que les différents parcours sont équiprobables.
- Quelle est la probabilité p_1 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_7 » ?
 - Quelle est la probabilité p_2 de l'événement « le personnage virtuel passe par le rocher R_{14} » ?
3. Chaque bond du personnage virtuel nécessite 2 secondes.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque parcours, associe sa durée en secondes.
- Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
4. Quelle devrait être la durée d'un bond du personnage virtuel pour que la durée moyenne d'un parcours soit égale à 10 secondes ?

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE			
Coefficient : 4	SESSION 2007	Durée : 4 heures	
SÉRIE : STI GÉNIE ÉLECTRONIQUE – GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE – GÉNIE OPTIQUE			ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
7MAI3ME1	Ce sujet comporte 6 pages		Page 4/6

PROBLEME : (10 points)

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans ce problème à une fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan \mathcal{P} .

On note \ln la fonction logarithme népérien.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g .

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calculer $g(1)$ et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : Détermination de l'expression de la fonction f

On admet qu'il existe deux constantes réelles a et b telles que, pour tout nombre réel x appartenant à

l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$.

1. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .

Calculer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe \mathcal{C} passe par le point de coordonnées $(1; 0)$ et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres a et b .

Partie C : Étude de la fonction f

On admet désormais que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. a) Vérifier que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Établir le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c) En déduire le signe de $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE		
Coefficient : 4	SESSION 2007	Durée : 4 heures
SÉRIE : STI GÉNIE ÉLECTRONIQUE – GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE – GÉNIE OPTIQUE		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES
7MAI3ME1	Ce sujet comporte 6 pages	Page 5/6

3. On considère la droite \mathcal{D} d'équation $y = x - 1$.

a) Justifier que la droite \mathcal{D} est asymptote à la courbe \mathcal{C} .

b) Étudier les positions relatives de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

c) Tracer la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} dans le plan \mathcal{P} muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie D : Calcul d'aire

On note \mathcal{A} la mesure, exprimée en cm^2 , de l'aire de la partie du plan \mathcal{P} comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.

On désigne par H' la fonction dérivée de la fonction H .

a) Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. a) Calculer \mathcal{A} .

b) Donner la valeur de \mathcal{A} arrondie au mm^2 .

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE			
Coefficient : 4	SESSION 2007	Durée : 4 heures	
SÉRIE : STI GÉNIE ÉLECTRONIQUE – GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE – GÉNIE OPTIQUE		ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	
7MAI3ME1	Ce sujet comporte 6 pages		Page 6/6

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$

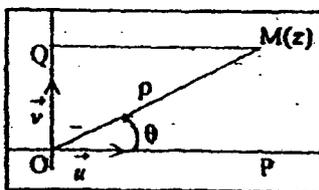
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$$\vec{OM} = x \vec{u} + y \vec{v}$$

$$\overline{OP} = x = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = y = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} ; \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) ; y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$$

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

B. IDENTITÉS REMARQUABLES

(valables sur \mathbb{C} et donc sur \mathbb{R})

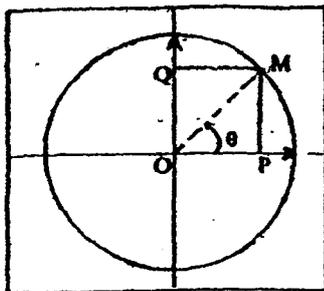
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) ; a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

C. TRIGONOMETRIE



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) ; \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

Formules d'addition

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) ; \quad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

Formules de Moivre

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

$$\text{soit encore } (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

$$\text{Si } b \neq 1, \quad S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$$

$$\text{Si } b = 1, \quad S_n = n + 1$$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[.$$

$$y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in]0, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[.$$

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n$$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0;$$

$$\text{si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

2. Suites (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

$$\text{Si } k > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty; \quad \text{si } 0 < k < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$$

C. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$]-\infty, +\infty[$
x	1	$]-\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

D. CALCUL INTÉGRAL

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$

E. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$