BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2008

MATHÉMATIQUES

Série Sciences et Technologies Industrielles

GÉNIE ÉLECTRONIQUE
GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE
GÉNIE OPTIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.
L'annexe en page 6/6 est à rendre avec la copie.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
(Circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants et d'un problème.
Le candidat doit traiter les 2 exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le formulaire officiel et une feuille de papier millimétré sont distribués avec le sujet.

EXERCICE 1 (6 points)

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 2z + 2 = 0.$$

2. Soient A et C deux points du plan complexe, d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i \qquad \text{et} \qquad z_C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) i.$$

   (a) Déterminer le module de z_A et le module de z_C.

   (b) Donner un argument de z_A.

3. (a) On pose $Z = \dfrac{z_C}{z_A}$. Démontrer que $Z = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

   (b) Démontrer que $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   (c) En déduire que le point C est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ (en radian).

   (d) Placer le point A puis construire le point C en utilisant le résultat de la question précédente. Décrire la construction. *Toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.*

4. Soit B l'image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.
   Constuire le point B et démontrer que OCAB est un losange.

EXERCICE 2 (4 points)

Un professeur d'une classe de terminale S.T.I. donne à ses élèves trois questions dans une interrogation écrite et propose deux réponses par question : l'une juste et l'autre fausse.

On désignera par J une réponse juste et par F une réponse fausse.
On suppose que les élèves répondent à chaque question en indiquant soit la réponse juste, soit la réponse fausse. A chaque élève, on associe le résultat de son interrogation, sous la forme d'un triplet constitué des réponses données aux trois questions. Par exemple, si un élève a répondu juste à la première, faux à la deuxième et à la troisième , on lui associera le résultat (J,F,F).

I) Déterminer à l'aide d'un arbre l'ensemble des résultats possibles. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

II) On considère un élève qui répond au hasard à chaque question et de façon indépendante pour chacune d'elles. Le professeur fait l'hypothèse d'équiprobrabilté des résultats.

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement A « le résultat contient exactement une réponse juste » est égale à $\frac{3}{8}$.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement B « le résultat contient au moins une réponse juste ».
3. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et 0 point pour une réponse fausse.
On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève.
   a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   b. Donner la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(X)$ de X.
4. Dans cette question, le professeur note les copies de la manière suivante : il donne 1 point pour une réponse juste et enlève 0,25 point pour une réponse fausse.
Si le total des points ainsi obtenu est négatif, la note attribuée est 0.

   On appelle Y la variable aléatoire qui à chaque résultat associe la note obtenue par l'élève. Calculer l'espérance mathématique $\mathrm{E}(Y)$ de Y.

PROBLÈME (10 points)

PARTIE A - Étude de la représentation graphique d'une fonction f

On donne, sur la **feuille annexe, à rendre avec la copie**, la représentation graphique C_f d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels.

Le plan est muni du repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 1,5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln 2$.
La droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$.
La courbe C_f admet une tangente de coefficient directeur -2 au point A(0 ;3).
Par lecture graphique et en utilisant les informations ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs $f(\ln 2)$ et $f(0)$?
2. Déterminer, en le justifiant, $f'(\ln 2)$ et $f'(0)$.
3. Quelle est la limite de f en $-\infty$?

PARTIE B - Étude de la fonction f

On admettra maintenant que f est la fonction définie sur **R** *par*

$$f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 6$$

*et on se propose dans cette partie de retrouver par le calcul les résultats obtenus graphiquement dans la **partie A**.*

1. Vérifier que pour tout nombre réel x : $f(x) = (e^{x} - 2)^2 + 2$.
2. Calculer $f(\ln 2)$.
3. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Quelle propriété de la courbe $\mathscr{C}_f$, présentée dans la **partie A**, est ainsi confirmée ?
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en utilisant l'expression de $f(x)$ donnée en **B.1**.
5. (a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et vérifier que pour tout nombre réel x,
   $$f'(x) = 2e^{x}(e^{x} - 2).$$
   (b) Résoudre sur **R** l'équation $f'(x) = 0$.
   (c) Résoudre sur **R** l'inéquation $f'(x) > 0$.
   (d) En déduire sur **R**, le tableau de signe de $f'(x)$, puis les variations de la fonction f. Dresser le tableau de variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f(\ln 2)$ et les limites trouvées en **B.3.(a)** et **B.4**.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution α sur **R**. Donner, en le justifiant, un encadrement de α à 10^{-1} près.

PARTIE C - Calcul d'une aire

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par :

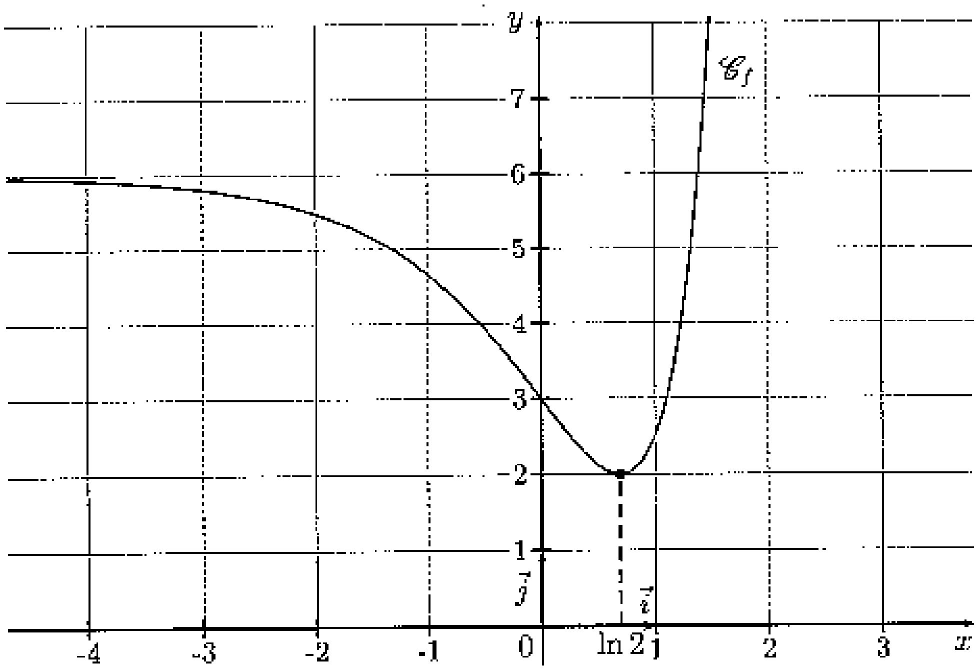
$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{x} + 6x$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

2. Hachurer sur **la feuille annexe la** partie du plan comprise entre la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

3. Soit $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE



BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$

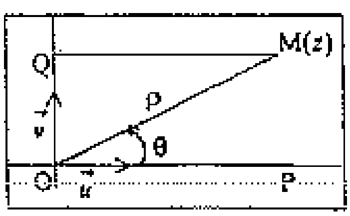
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + i\,y$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$; $y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

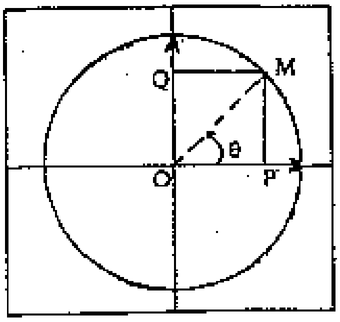
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; $\quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a$; $\quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n$; $\quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n + 1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\dfrac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1 + x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES **STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)**

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$, si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n, n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$