BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Session 2009

MATHÉMATIQUES
Série Sciences et Technologies Industrielles

GÉNIE ÉLECTRONIQUE
GÉNIE ÉLECTROTECHNIQUE
GÉNIE OPTIQUE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
(Circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999)

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants et d'un problème.
Le candidat doit traiter les 2 exercices et le problème.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le formulaire officiel et deux feuilles de papier millimétré sont distribués avec le sujet.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

Le nombre i désigne le nombre complexe de module 1 d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation, d'inconnue z :

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0\,.$$

2. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}}$.
   (a) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_{A} et z_{B}.
   (b) Construire le cercle de centre O et de rayon 4 cm, puis placer les points A et B dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u},\vec{v})$ précisé ci-dessus.

3. On désigne par R la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M$'$ d'affixe z' tel que $z' = iz$.
   (a) Indiquer la nature de la transformation R et préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Le point C est l'image du point A par la transformation R.
   Déterminer la forme algébrique de l'affixe z_{C} du point C.
   Placer ce point C dans le repère précédent.
   (c) Montrer que le point C est le symétrique du point B par rapport au point O.

4. *Dans cette question, toute rédaction, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (4 points)

Un sac contient 4 boules indiscernables au toucher : une jaune, une rouge, une verte et une noire notées respectivement : J, R, V et N.

Dans une fête foraine, un jeu est organisé de la manière suivante :
On tire au hasard une première boule du sac, on note sa couleur, et on la remet dans le sac.
On effectue ensuite un deuxième tirage au hasard, indépendant du premier, dont on note également la couleur.
Ces tirages sont équiprobables.

On appelle résultat un couple dont le premier élément est la couleur de la boule obtenue au premier tirage et le second élément est celle de la boule obtenue au second tirage.
Exemple : Le résultat du tirage de la boule rouge suivie de la boule verte se note (R ; V).

1. Déterminer l'ensemble des résultats possibles.

2. Calculer la probabilité du résultat (N ; N).

3. Pour jouer, on doit miser 20 euros.
   Une boule jaune rapporte 20 euros, une boule rouge 12 euros, une boule verte 5 euros et une boule noire ne rapporte rien.
   On appelle X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le bénéfice ou la perte réalisé par le joueur, un bénéfice étant compté positivement, et une perte négativement.

   Exemple
   Le résultat (R ; V) rapporte au joueur 17 euros. Il perd dans ce cas $20 - 17 = 3$ *euros. La valeur de* X *correspondant à ce cas est donc* -3.

   (a) Montrer que, pour le résultat (J ; R), la variable aléatoire X prend la valeur 12.

   (b) Indiquer dans un tableau les résultats obtenus dans la question 1 en y mentionnant les valeurs prises par la variable aléatoire X.

   (c) Montrer que la probabilité que X prenne la valeur 12 est égale à $\frac{1}{8}$.

   (d) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (e) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

PROBLÈME (11 points)

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :

$$f(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 4 .$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unités graphiques : 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées).

PARTIE A : Étude de la fonction f

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ dont on précisera une équation.

   (b) Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = e^{x}(e^{x} - 5) + 4$. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. (a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Pour tout nombre réel x, calculer $f'(x)$. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^{x}(2e^{x} - 5)$.

   (b) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels l'équation $2e^{x} - 5 = 0$. Résoudre ensuite dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{x} - 5 > 0$.

   (c) En déduire les variations de la fonction f. Indiquer la valeur exacte de $f\left(\ln\dfrac{5}{2}\right)$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,2]$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

4. (a) Montrer que le point O appartient à la courbe $\mathscr{C}$.

   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point O.

5. Tracer dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'asymptote $\mathscr{D}$, la droite Δ et, sur l'intervalle $[-2,5\,;\,2]$, la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE B : Calcul d'aire

1. Quel est le signe de la fonction f sur l'intervalle $\left[\ln\dfrac{1}{2}\,;\,0\right]$?

2. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $x = \ln\dfrac{1}{2}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   (a) Hachurer le domaine $\mathscr{D}$ sur le graphique précédent.

   (b) Calculer l'aire exacte du domaine $\mathscr{D}$ en cm^2, puis donner une valeur approchée au centième de cette aire.

BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F108,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2$

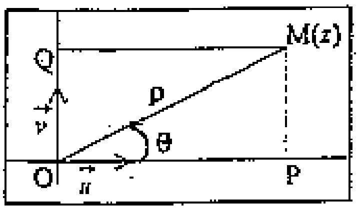
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re e(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im m(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué

$z = x + iy = \rho e^{i\theta}$; $\overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*
(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

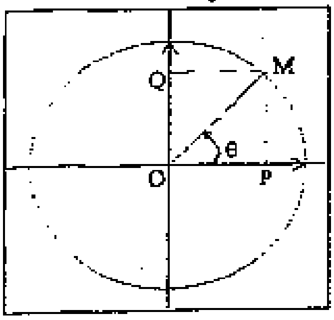
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\quad ;\quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)\ ;\ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a},\quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a\quad ;\quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n\quad ;\quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n+1$

III. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES STL, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$

STI STL 4