Session 2010

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

Série sciences et technologies industrielles

Génie électronique
Génie électrotechnique
Génie optique

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 4

Le formulaire officiel est joint au sujet
L'utilisation d'une caculatrice est autorisée
(Circulaire n°99-186 du 16/11/1999)

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Une feuille de papier millimétré est fournie.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 centimètres. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre l'équation $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ dans l'ensemble des nombres complexes.

2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}\ ;\ z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \text{ et } z_3 = 2\mathrm{i}$$

a. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

b. Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_3}{z_2}$.

d. En déduire que le point C est l'image du point B par une rotation R de centre O dont on précisera l'angle.

3. Soit E le symétrique du point A par rapport à l'origine O du repère.

a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point E.

b. Montrer que le point E est l'image du point C par la rotation R.

4. Démontrer que le triangle BEC est équilatéral.

Exercice 2 (4 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$9y'' + y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable x et y'' la dérivée seconde de la fonction y.

2. On désigne par f la solution de (E) vérifiant $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

   a. Déterminer la fonction f.

   b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)$.

3. La valeur efficace de la fonction f est le réel positif E défini par $E^2 = \frac{1}{6\pi}\int_0^{6\pi}\left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$.

   a. Montrer que, pour tout réel x, $\left(f(x)\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

   b. Calculer le réel E.

Problème (11 points)

Partie A

On donne en annexe la courbe représentative Γ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente Δ au point d'abscisse 0.

1. Par lecture graphique, donner les valeurs entières de $g(0)$ et de $g'(0)$.

2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^x + ax + b$. On note g' la dérivée de la fonction g.

   a. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

   b. À l'aide des résultats des deux questions précédentes, calculer les valeurs de a et de b.

3. Dans la suite du problème, on admet que, pour tout réel x, $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2$.

   a. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variations dans lequel on précisera la valeur exacte de l'extremum (les limites ne sont pas demandées).

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

c. Comment ce résultat se traduit-il graphiquement ?

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(1 + 2\mathrm{e}^{-x})$$

On note f' la dérivée de la fonction f et on appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 2 centimètres en abscisse et 1 centimètre en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier que la courbe C admet pour asymptote en $+\infty$ la droite D d'équation $y = x$.

c. Étudier les positions relatives de la courbe C et de la droite D. On précisera leur point d'intersection.

3. a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.

b. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C en son point d'abscisse 0.

5. Sur une feuille de papier millimétré qui vous sera fournie, tracer les droites D et T ainsi que la courbe C.

Partie C

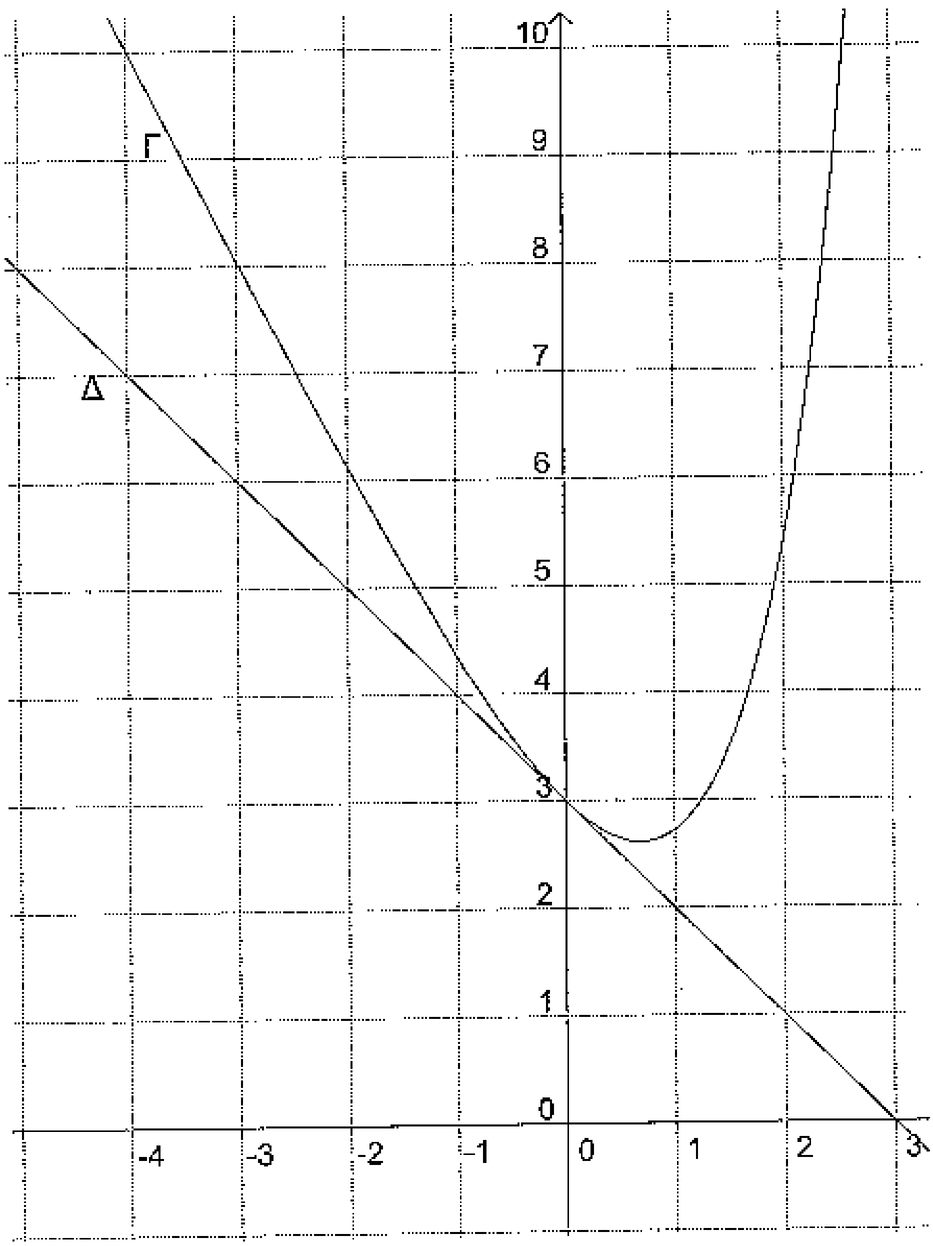
On note A la mesure, exprimée en centimètres carrés, de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe C, la droite D, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

1. Hachurer le domaine ainsi défini.

2. Soient h et H les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$ et $H(x) = 2(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la valeur exacte de A puis en donner une valeur arrondie au millimètre carré près.

Annexe (problème - partie A)



BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités), F10B,
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Dans le cas général : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(\overline{A})=1-P(A)$; $P(\Omega)=1$; $P(\varnothing)=0$

Dans le cas équiprobable : $P(A)=\dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x)=P(X\leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-\left(E(X)\right)^2$

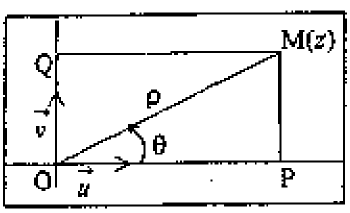
Écart type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z=x+iy$

Forme trigonométrique : $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}$, $\rho>0$



$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$

$\overline{OP}=x=\Re e(z)=\rho\cos\theta$

$\overline{OQ}=y=\Im m(z)=\rho\sin\theta$

$OM=\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Opérations algébriques

$z+z'=(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$

$zz'=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$

Conjugué

$z=x+iy=\rho e^{i\theta}$; $\bar{z}=x-iy=\rho e^{-i\theta}$

$x=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$; $y=\dfrac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$; $\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z}'$

$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz'=\left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right)=\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

$|zz'|=|z||z'|$

$\dfrac{z}{z'}=\dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}=\dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n=\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$, $n\in\mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\big||z|-|z'|\big|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

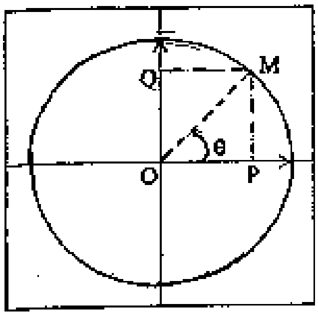
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a)\ ;\ \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = u_n + a \quad ; \quad u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $\quad u_{n+1} = bu_n \quad ; \quad u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n+1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. *Suites* (SÉRIES **STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)**

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)'=u'+v'$

$(ku)'=ku'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)'=(v'\circ u)u'$

$(e^u)'=e^u u'$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt\geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt\leqslant\int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(t)dt\leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Equations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$