Session 2005

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez-vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques et une feuille de papier millimétré sont distribués en même temps que le sujet.

Exercice 1 (4 points)

Une urne contient six billets numérotés de 1 à 6.

On tire au hasard deux billets successivement et sans remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque tirage peut être modélisé par un couple (a ; b) de deux nombres distincts.

Par exemple le tirage du billet numéroté 3 suivi du billet numéroté 5 sera noté (3 ; 5).

a. Justifier qu'il y a 30 couples possibles.

b. Soit A l'événement : « les deux numéros tirés sont pairs ».

Vérifier que la probabilité de A est égale à $\frac{1}{5}$.

c. Calculer la probabilité de l'événement B : « au moins l'un des numéros est impair ».

2. Soit D la variable aléatoire, qui à chaque tirage associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres du couple. Ainsi au couple (3 ; 5) comme au couple (5 ; 3) la variable aléatoire D associe le réel $5-3=2$.

a. Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire D ?

b. Calculer les probabilités $P(D=1)$ et $P(D=3)$.

c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire D.

d. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire D.

Exercice 2 (4 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $y''+9y=0$, où y est une fonction de la variable x définie sur **R.**

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. La courbe $\mathscr{C}$, donnée ci-dessous, représente une solution particulière notée f de l'équation différentielle (E). La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(0 ; 1) et le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$ est égal à $-3\sqrt{3}$.

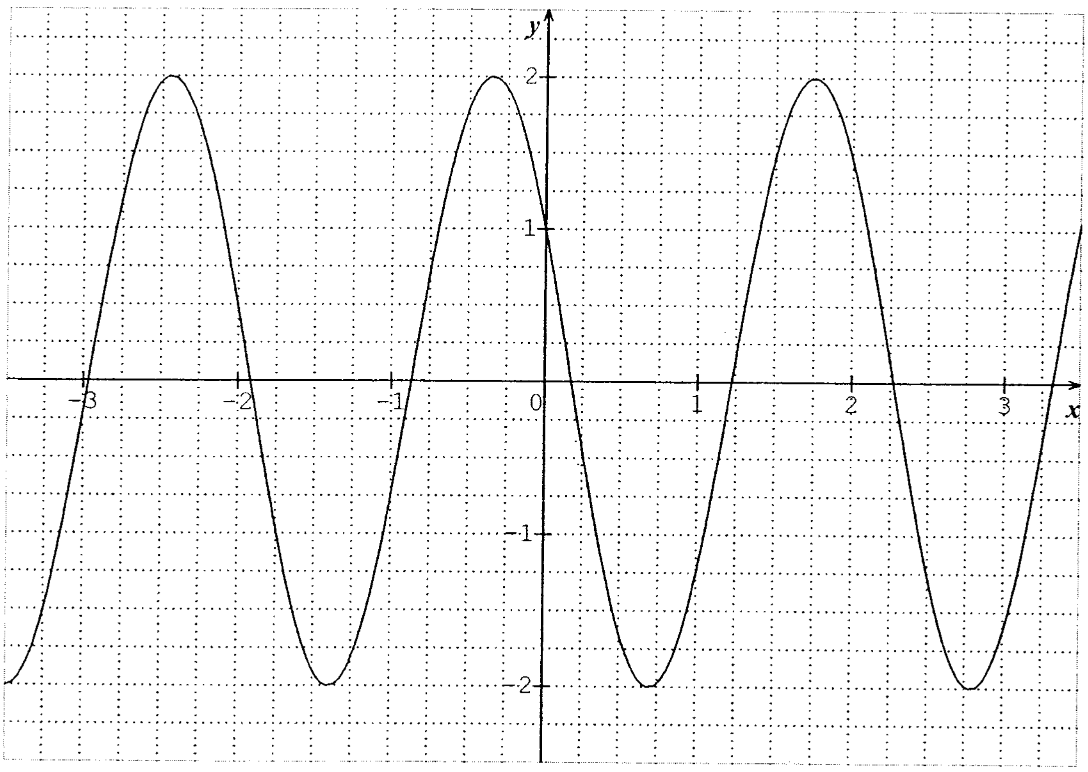
a. En déduire les valeurs exactes de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b. Déterminer cette solution particulière f.

c. Vérifier que, pour tout réel x, $f(x)=2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3. **a.** Montrer que $\dfrac{7\pi}{18}$ et $\dfrac{13\pi}{18}$ sont deux solutions de l'équation, d'inconnue x, $f(x)=0$.
Déterminer deux autres solutions de cette équation.

b. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{7\pi}{18};\dfrac{13\pi}{18}\right]$.



Problème (12 points)

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 4 - e^{-x}$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

Partie A : Étude d'une fonction

1. **a.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathscr{C}$ et donner son équation.

2. **a.** Déterminer la dérivée f' de la fonction f et justifier son signe sur **R**.

b. Donner le tableau de variation de f.

3. **a.** Résoudre sur **R** l'équation d'inconnue x, $f(x) = 0$.

b. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ dans le repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ défini ci-dessus.

Partie B : Résolution d'une équation

Soit (E) l'équation d'inconnue réelle x : $f(x) = 2x + 3$.

1. Vérifier que $x = 0$ est une solution de (E).

2. **a.** Tracer la droite D d'équation $y = 2x + 3$ sur le même graphique que la courbe $\mathscr{C}$.

b. Justifier graphiquement l'existence d'une deuxième solution notée α de l'équation (E). Placer α sur l'axe des abscisses.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie C : Calcul d'une aire

1. Hachurer le domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 0$. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire en cm^2 de ce domaine plan.

2. **a.** Vérifier que $\mathscr{A} = 8\int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx$.

b. Calculer $\mathscr{A}$ en fonction de α.

c. En utilisant l'équation (E) de la **partie B**, justifier que : $e^{-\alpha} = 1 - 2\alpha$.
En déduire que $\mathscr{A} = -16\alpha$.

d. À l'aide du résultat obtenu dans la **partie B**, déterminer une valeur de $\mathscr{A}$ arrondie au dixième.