BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE S.T.I.

Génie électronique – Génie électrotechnique – Génie optique

SESSION 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT
LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

* * * *

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des calculatrices électroniques, programmables, alphanumériques ou à écran graphique **est autorisée**, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit fait usage d'aucune imprimante.
Chaque candidat ne peut utiliser qu'une seule machine sur sa table.
En cas de défaillance, elle pourra cependant être remplacée.
Cependant, les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que l'échange d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits.
(circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999)

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

EXERCICE 1 : (4,5 points)

C est l'ensemble des nombres complexes et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

2. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} \text{ et } z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}.$$

a) Déterminer le module et un argument de z_1.

b) Écrire z_1, puis z_2 sous forme exponentielle.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ d'unité 1 cm.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

a) Placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

b) Montrer que le point M_2 est l'image du point M_1 par la rotation r.

c) On appelle M_3 le point image du point M_2 par la rotation r.
Calculer l'affixe z_3 du point M_3.
Placer le point M_3 dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

d) Démontrer que le triangle $\mathrm{M}_1\,\mathrm{M}_2\,\mathrm{M}_3$ est équilatéral.

4. Vérifier que les nombres complexes $(z_1)^6$ et $\frac{(z_1)^4}{(z_2)^2}$ sont des entiers naturels.

On utilisera la forme de z_1 et z_2 la plus adaptée.

EXERCICE 2 : (4,5 points)

I. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_0) : y'' + 4y = 0$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble **R** des nombres réels, et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation (E_0).

2. Déterminer la solution particulière f de (E_0) vérifiant :

$$f(0) = \sqrt{3} \text{ et } f'(0) = 2 \ ;$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Montrer que pour tout réel t, $f(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(t) = 2\cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0 \ ; \frac{\pi}{2}\right]$.

II. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) : y'' + 4y = 3\sin t$$

où y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur l'ensemble **R**, et y'' sa dérivée seconde.

1. Montrer que si une fonction g est solution de l'équation (E_0), alors la fonction h définie sur **R** par : $h(t) = g(t) + \sin t$ est solution de l'équation (E_1).

2. Donner une solution particulière, ne s'annulant pas pour $t = 0$, de l'équation (E_1).

Erratum –

PROBLÈME : (11 points)

Sur la feuille annexe, **qui doit être remise avec la copie**, on donne, dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction *f*, définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

Partie A : Détermination de la fonction *f*

On suppose que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A de coordonnées $\left(3\,;-\frac{7}{2}+3\ln 2\right)$.

La droite D d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
On note f' la fonction dérivée de *f*.

1. Quelle est la valeur exacte de $f(3)$?

2. Donner sans justification la limite de la fonction f en 2.

3. On suppose que, pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;+\infty[$,
$f(x)=ax-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2)$.
En utilisant la réponse de la question 1, déterminer algébriquement le nombre a.

Partie B : Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln(x-1)-3\ln(x-2).$$

1. **a)** Retrouver par le calcul la limite de la fonction f en 2.

b) Montrer que, pour tout x réel de l'intervalle $]2\,;+\infty[$,

$$f(x)=\frac{1}{2}x-5+3\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right).$$

c) En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x-5$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. Tracer Δ sur la feuille annexe.

3. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]2\,;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{x^2-3x-4}{2(x-1)(x-2)}.$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

4. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2{,}1\,;3]$ et une solution unique β dans l'intervalle $[9\,;10]$.

b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune des solutions α et β.

Partie C : Calcul d'aire.

1. On considère les fonctions h et H définies sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par $h(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ et $\mathrm{H}(x)=(x-1)\ln(x-1)-(x-2)\ln(x-2)$.

a) Montrer que la fonction H est une primitive de la fonction h sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

b) En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.

2. On considère le domaine $\mathcal{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=3$ et $x=9$.

a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique de la feuille annexe.

b) On note $\mathcal{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine $\mathcal{D}$. Exprimer $\mathcal{A}$ sous la forme d'une intégrale.

c) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

FEUILLE ANNEXE A REMETTRE AVEC LA COPIE.

Courbe de la fonction *f*