SUJET SORTI

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SÉRIE SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

OPTIONS : GENIE MECANIQUE B, C, D, E et GENIE DES MATERIAUX

SESSION 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée 4 heures - Coefficient 4

Le sujet comporte 4 pages.

La page annexe 4/4 sera à rendre avec votre copie.

Deux feuilles de papier millimétré sont fournies au candidat avec le sujet.
L'usage des calculatrices est autorisé (circulaire n°99-186 du 16-11-1999)
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $4y'' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur **R** et où y'' désigne sa dérivée seconde.
2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f, dont la courbe représentative C_f est fournie en annexe. On note f' la fonction dérivée de f.
   a) La courbe C_f passe par le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
   b) Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur **R** par :
   $$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$
3. a) Soit D le domaine du plan délimité par :
   - l'axe des abscisses
   - l'axe des ordonnées
   - la droite d'équation $x = \pi$
   - la courbe C_f

   Hachurer le domaine D sur la feuille annexe.
4. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin(x)$
5. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.
   Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.
   On rappelle que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [f(x)]^2\, dx$

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par i le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $(z + 4)(z^2 - 4z + 16) = 0$
2. On considère les nombres complexes définis par :
   $$z_A = 2 + 2\sqrt{3}\,i \qquad z_B = 2 - 2\sqrt{3}\,i \qquad z_C = -4$$
   Calculer le module et un argument de z_A.
   En prenant comme unité graphique 1 cm, placer dans le plan complexe (en utilisant une feuille de papier millimétré) le point A d'affixe z_A, le point B d'affixe z_B et le point C d'affixe z_C.

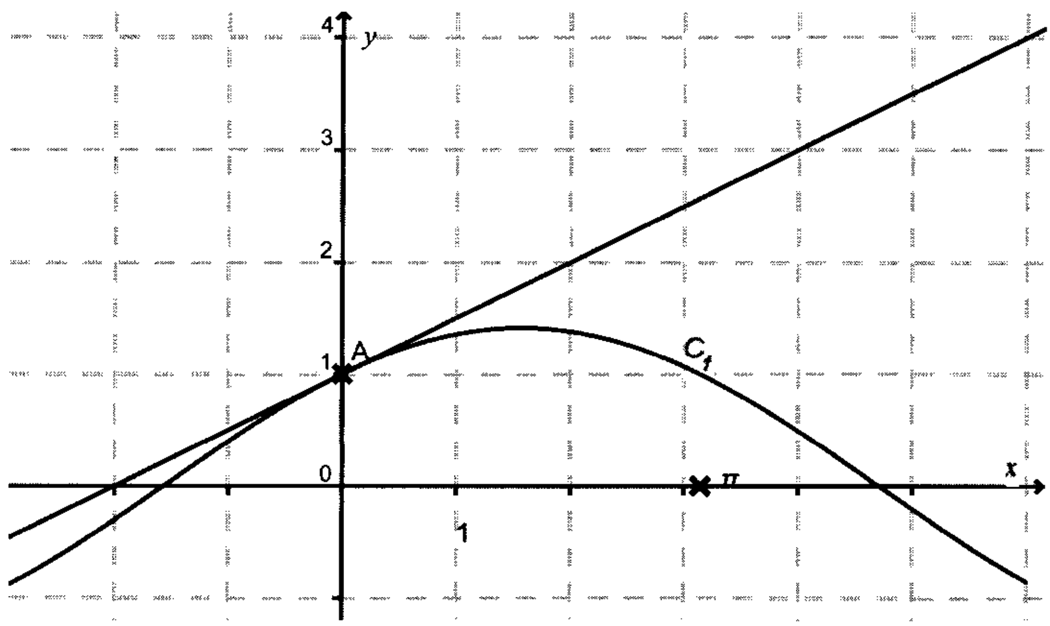
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   a) Démontrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
   b) Placer le point D milieu du segment [AC].
   c) Déterminer la nature du triangle BDA.

PROBLÈME (10 points)

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, d'expression $f(x) = \mathrm{e}^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}$
On note f' sa fonction dérivée.
Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme $f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1)(\mathrm{e}^x + 1)}{\mathrm{e}^x}$
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbf{R}$.
   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbf{R}$.
3. a) Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$ d'inconnue X.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$
   c) En utilisant la question a), résoudre l'équation $2(\mathrm{e}^x)^2 - 5\mathrm{e}^x + 2 = 0$
   d) Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses ?
   e) En utilisant les résultats des questions 2.c) et 3.d) déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbf{R}$.
4. Déterminer une équation de la droite T tangente à C_f au point d'abscisse ln(2).
5. En utilisant une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe C_f et la droite T : unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
6. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, d'expression $F(x) = \mathrm{e}^x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}$
   a) Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
   b) En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_{\ln(2)}^{2} f(x)dx$
   c) Hachurer sur le graphique la partie du plan dont l'intégrale I donne la valeur de l'aire A en unité d'aire.
   d) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire A de la partie hachurée, exprimée en cm^2. On donnera ensuite une valeur approchée de A à $0,1\ \mathrm{cm}^2$ près.

Annexe de l'exercice 1 à rendre avec la copie



BACCALAURÉAT, SÉRIES STI (toutes spécialités),
STL (spécialités physique de laboratoire et de procédés industriels
chimie de laboratoire et de procédés industriels)

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

Dans le cas général : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(\overline{A})=1-P(A)$; $P(\Omega)=1$; $P(\varnothing)=0$

Dans le cas équiprobable : $P(A)=\dfrac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x)=P(X\leqslant x)$

Espérance mathématique : $E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i$

Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(x_i-E(X)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-\left(E(X)\right)^2$

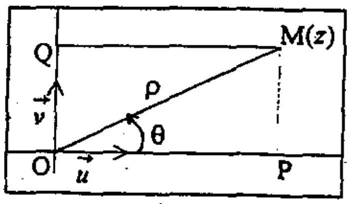
Écart type $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

II. ALGÈBRE

A. *NOMBRES COMPLEXES*

Forme algébrique : $z=x+iy$

Forme trigonométrique : $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta}, \rho>0$



$\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$

$\overline{OP}=x=\Re e(z)=\rho\cos\theta$

$\overline{OQ}=y=\Im m(z)=\rho\sin\theta$

$OM=\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

Opérations algébriques

$z+z'=(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y')$

$zz'=(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$

Conjugué

$z=x+iy=\rho e^{i\theta}$; $\bar{z}=x-iy=\rho e^{-i\theta}$

$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$; $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$; $\overline{zz'}=\bar{z}\,\bar{z'}$

$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$

$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$zz'=\left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right)=\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

$|zz'|=|z||z'|$

$\frac{z}{z'}=\frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}=\frac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

$z^n=\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}, n\in\mathbb{Z}$

Inégalité triangulaire

$\left||z|-|z'|\right|\leqslant|z+z'|\leqslant|z|+|z'|$

B. *IDENTITÉS REMARQUABLES*

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

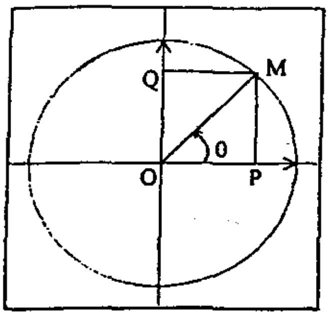
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$; $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$

B. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

Formules d'addition

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2a) \; ; \; \sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2a)$

Formules de Moivre

Pour tout entier naturel non nul n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

D. ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles
$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- si $\Delta = 0$, une solution réelle double
$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$
- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées
$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES, SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $\quad S_n = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n = \dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$

Si $b = 1$, $\quad S_n = n+1$

III. ANALYSE

A. *PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES*

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$ln\,1 = 0$

$ln\,e = 1$

$ln\,ab = ln\,a + ln\,b$

$ln\frac{a}{b} = ln\,a - ln\,b$

Si $x \in]-\infty, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$,

$y = exp\,x = e^x$ équivaut à $x = ln\,y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x\,ln\,a}$ $(a > 0)$

$\left(e^a\right)^b = e^{ab}$

$ln\,a^x = x\,ln\,a$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ $(x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$

$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

B. *LIMITES USUELLES DE FONCTIONS ET DE SUITES*

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} ln\,x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim_{x \to 0} ln\,x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

Comportement à l'origine de $ln(1+x)$, e^x, $\sin x$

$\lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

2. Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique, STL, spécialité physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim_{n \to +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim_{n \to +\infty} k^n = 0$

C. *DÉRIVÉES ET PRIMITIVES* (Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	*Intervalle de validité*
k	0	$]-\infty,+\infty[$
x	1	$]-\infty,+\infty[$
$x^n,\ n\in\mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$]-\infty,+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\frac{1}{x^n},\ n\in\mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty,+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$]-\infty,+\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$

$(ku)' = ku'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, u à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$

D. *CALCUL INTÉGRAL*

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$

Formule de Chasles

$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

Linéarité

$\int_a^b (\alpha f(t)+\beta g(t))dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité

Si $a\leqslant b$ et $f\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a\leqslant b$ et $f\leqslant g$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$

Si $a\leqslant b$ et $m\leqslant f\leqslant M$, alors $m(b-a)\leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne de f sur $[a\,,\,b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$

E. *ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES*

Équations	Solutions sur $]-\infty\,,\,+\infty[$
$y'-ay=0$	$f(x)=ke^{ax}$
$y''+\omega^2 y=0$	$f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$